Geometria

9–10. évfolyam

Szerkesztette:
Hraskó András, Surányi László

2022. október 9.

Technikai munkák
(MatKönyv project, TEX programozás, PHP programozás, tördelés...)

Dénes Balázs, Grósz Dániel, Hraskó András,
Kalló Bernát, Szabó Péter, Szoldatics József

Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium
1082 Budapest, Horváh Miháy tér 8.
http://matek.fazekas.hu/
2005 / 2020

Tartalomjegyzék

1. FEJEZET

Bevezetés

1.1. Ismétlő feladatok

1.1. (M) Két kör az A pontban kívülről érinti egymást. Egyik közös külső érintőjük a két kört az E és F pontban érinti. Mekkora az EAF szög?

1.2. (M) Két kör kívülről érinti egymást. Az egyik közös külső érintő a két kört E-ben, illetve F-ben érinti. Igazoljuk, hogy az EF mint átmérő fölé rajzolt Thálész-kör érinti a két kör centrálisát!

1.3. (M) Az O és O' középű körök kívülről érintik egymást. Bizonyítsuk be, hogy az OO' mint átmérő fölé rajzolt Thálész-kör érinti a két közös külső érintőt!

1.4. (M) [12] Egyenlő szárú-e minden olyan háromszög, melyben a beírt kör középpontja egyenlő távolságra van

a) két csúcstól?

b) két oldal felezőpontjától?

1.5. (M) Két kör kívülről érinti egymást. Igazoljuk, hogy közös külső érintőjük hossza a két kör átmérőjének mértani közepe.

1.6. (M)

a) Vegyük fel a (nem derékszögű) ABC háromszöget és szerkesszük meg M magasságpontját és a magasságvonalak talppontjait!

b) Szerkesszük bele az előző ábrába az ABM háromszög magasságpontját és a magasságvonalak talppontjait!

c) Fogalmazzunk meg sejtést, próbáljuk meg bebizonyítani!

1.7. a) Az ABC háromszög szögei α, β és γ. Számítsuk ki az ABM, BCM, CAM háromszög szögeit!

b) Mutassuk meg, hogy az ortogonális pontnégyes (lásd az 1.6M. feladatmegoldást) csúcsaiból alkotható négy háromszög közül pontosan egy hegyesszögű.

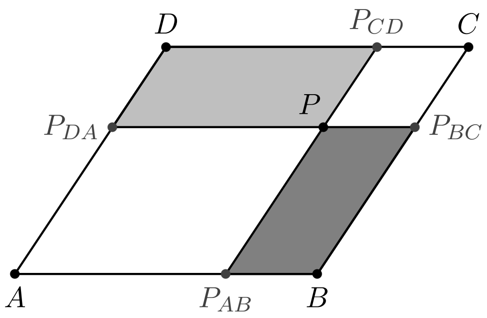
1.8. Az $ABCD$ paralelogramma P belső pontján át az oldalakkal párhuzamosan húzott egyenesek az oldalakat a P_{AB}, P_{BC}, P_{CD}, P_{DA} pontokban metszik (lásd az 1. ábrát).

a) Mutassuk meg, hogy ha P illeszkedik az AC átlóra, akkor a $P_{AB}BP_{BC}P$, $PP_{CD}DP_{DA}$ paralelogrammák területe egyenlő.

b) Mutassuk meg, hogy ha a $P_{AB}BP_{BC}P$, $PP_{CD}DP_{DA}$ paralelogrammák területe egyenlő, akkor P illeszkedik az AC átlóra.

1.9. (M) Az $ABCD$ szinnetrikus trapézba kör írható. Fejezzük ki a kör sugarát a trapéz $AB = a$, $CD = c$ alapjainak hosszával!

1.10. (MS) Az $ABCD$ trapézba kör írható. A beírt kör az AB alapot az E pontban, a CD alapot az F pontban érinti. Igazoljuk, hogy $AE \cdot DF = r^2$, ahol r a beírt kör sugarának hossza.



1.8.1. ábra.

1.2. Dinamikus geometriai szoftverek

Az itt következő feladatokhoz javasoljuk dinamikus geometriai szerkesztőprogram alkalmazását. Néhány alkalmas szoftver:

Cabri: http://www.cabri.com/, hazai forgalmazó: http://www.ite.hu/
Euklidesz: http://matek.fazekas.hu/euklides/
Geogebra: http://www.geogebra.org/, http://www.uni-miskolc.hu/evml/geogebra/
The Geometer's Sketchpad: http://www.dynamicgeometry.com/

1.1. (M) Készítsünk szép ábrát!

a) Legyen rajta egy háromszög, a belső és külső szögfelezői szaggatott illetve pontozott vonallal, a beírt és hozzáírt körei, az érintési pontok (betűjel nélkül). Legyen vastagon színessel jelölve a hat $(s-a)=\frac{-a+b+c}{2}$ hosszúságú szakasz.

b) Az előző ábrába rajzoljuk be színessel a háromszög Feuerbach körét (az oldalfelezőpontokon átmenő kört).

1.2. (MS) Vizsgáljuk adott ponton át adott körhöz húzott szelőkből a kör által lemetszett húrok felezőpontjának mértani helyét!

1.3. (M) Pontsorozatot képzünk adott ABC háromszögre alapozva, az BA oldal egy C_0 pontjából indítva.

Legyen A_0 az AC oldallal C_0-on át húzott párhuzamos egyenes és a CB oldal metszéspontja.
Legyen B_0 a BA oldallal A_0-on át húzott párhuzamos egyenes és az AC oldal metszéspontja.
Legyen C_1 a CB oldallal B_0-on át húzott párhuzamos egyenes és az BA oldal metszéspontja.

Ezt a három lépést ismételjük, termmészetesen most már C_0 helyébe C_1-et írva és az indexeket másutt is értelemszerűen növelve.

Tegyünk megfigyelést, fogalmazzuk meg sejtést, próbáljuk meg igazolni!

2. FEJEZET
Háromszög adatai az oldalak függvényében

2.1. Az ABC háromszög A csúcsához tartozó magasságának talppontja T_A, a BC oldal felezőpontja F_A. Fejezzük ki a

a) BT_A,   **b)** T_AF_A

szakasz hosszát a háromszög oldalainak függvényeként! Gondoljunk tompaszögű háromszög esetére is!

2.2. Írjuk fel a háromszög magasságait az oldalak hosszának függvényeként!

2.3. Írjuk fel a háromszög területét az oldalak hosszának függvényeként!

2.4. Írjuk fel a háromszög AF_A súlyvonalának hosszát a háromszög oldalainak függvényeként!

2.5. Írjuk fel a háromszög A csúcsához tartozó belső szögfelezője által a BC oldalból levágott részek hosszát a háromszög oldalainak függvényeként!

2.6. Írjuk fel a háromszög A csúcsához tartozó belső szögfelezőjének hosszát a háromszög oldalainak függvényeként!

2.7. Stewart-tétel Az ABC háromszög BC oldalán adott X pontra $BX = m$, $XC = n$, $AX = p$. Fejezzük ki p-t a háromszög a, b, c oldalainak, továbbá az m, n adatok függvényében!

2.8. Írjuk fel a háromszögbe írt kör sugarát a háromszög oldalainak függvényeként!

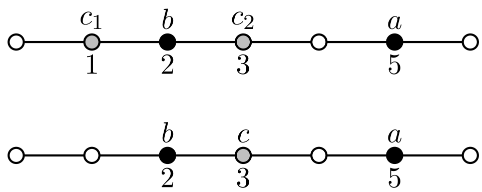
2.9. Írjuk fel a háromszög köré írt kör sugarát a háromszög oldalainak függvényeként!

3. FEJEZET
Egybevágóságok

Az irányított szög fogalma és additivitása

Az a, b számok *különbség*én a hétköznapi szóhasználatban általában az $|a-b|$ kifejezés értékét, a különbség abszolút értékét értjük. A matematikában viszont gyakran az $(a-b)$ kifejezés értékére van szükség, amelynek lehet negatív is. Az $|a-b|$-különbség előnye, hogy független attól, hogy a két szám közül melyik a és melyik b, például 2 és 5 illetve 5 és 2 ilyen értelmű különbsége ugyanaz a szám. Az $(a-b)$-különbség előnye az, hogy *additív*: ha ismert $(a-b)$ és $(b-c)$ értéke, akkor egyértelmű és könnyen kiszámolható $(a-c)$ értéke, tudniillik az előző kettő összege. Ez a tulajdonsága az $|a-b|$ különbségnek nincs meg: ha pl $|a-b|=3$ és $|b-c|=1$, akkor $|a-c|$ értéke 2 és 4 is lehet attól függően, hogy c az a és b számok között van a számegyenesen vagy nem (lásd az 1. ábrát).

Ha $|a-b|=3$ és $|b-c|=1$, akkor $|a-c|=2$ vagy 4.

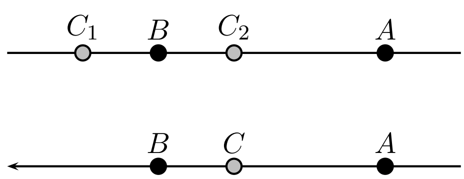


Ha $a-b=3$ és $b-c=-1$, akkor $a-c=2$.

3.1. ábra.

Vizsgáljuk most egy tetszőleges egyenest és rajta az A, B, C pontokat! Az A és B pontok távolságán, jelben $d(A,B)$, mindig nemnegatív számot értünk. A $d(A,C)$ távolság értékét $d(A,B)$ és $d(B,C)$ ismeretében még nem tudjuk egyértelműen meghatározni: a pontok elhelyezkedési sorrendjétől függően vagy $(d(A,B)+d(B,C))$-vel vagy $|d(A,B)-d(B,C)|$-nel egyenlő. Ezen segít, ha az egyenesen rögzítünk egy irányt és előjeles távolsággal dolgozunk. A $d_i(A,B)$ előjeles távolságon a nemnegatív $d(A,B)$ mennyiséget értjük, ha A-tól B az irányításnak megfelelő irányban van, míg $d_i(A,B)=-d(A,B)$, ha A-tól B a felvett irányítással ellenkező irányban van. A d_i mennyiség additív: $d_i(A,B)+d_i(B,C)=d_i(A,C)$ (lásd a 2. ábrát).

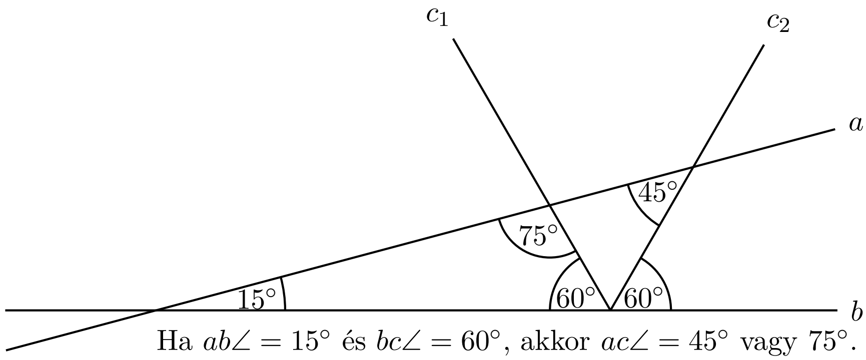
Ha $d(A,B)=3$ és $d(B,C)=1$, akkor $d(A,C)=2$ vagy 4.



Ha $d_i(A,B)=3$ és $d_i(B,C)=-1$, akkor $d_i(A,C)=2$.

3.2. ábra.

Két metsző egyenes szögén az általános iskolában egy 0° és 90° közti szöget értünk. Ezt a szöget $ab\angle$-gel fogjuk jelölni. Az $ab\angle$, $bc\angle$ szögek ismeretében $ac\angle$ értéke még nem határozható meg egyértelműen (lásd a 3. ábrát).



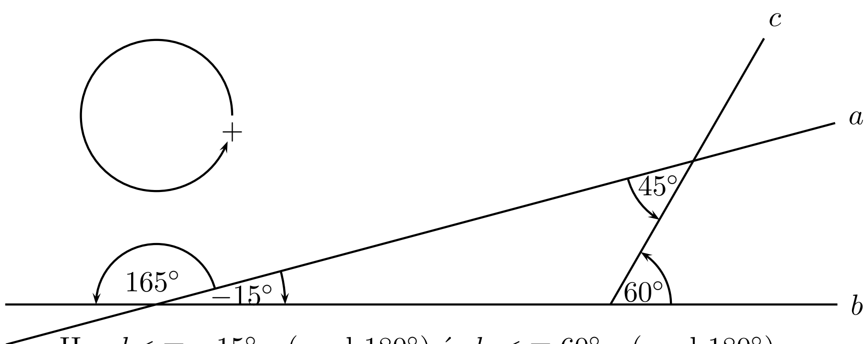
Ha $ab\angle = 15°$ és $bc\angle = 60°$, akkor $ac\angle = 45°$ vagy $75°$.

3.3. ábra.

Rögzítsünk most a síkon egy (forgási) irányítást! Közmegegyezés szerint az óra járásával ellenkező forgásirányt tekintjük pozitívnak, az azzal ellenkező forgásirányt negatívnak. Az a és b egyenesek irányított szögén, jelben $ab\sphericalangle$, értsük azt a forgási irányításnak megfelelő előjeles szöget, amellyel az a egyenes elforgatható, hogy a b egyenest kapjuk. A 4. ábrán látható a egyenes $-15°$-os és $165°$-os forgatással is b-be vihető. Az irányított szög nem egyértelmű, ha az a egyenes b-be forgatható egy φ szöggel, akkor $\varphi + 180°$, $\varphi + 360°$, stb szögű elforgatásokkal is b-be forgatható, tehát két egyenes irányított szöge csak $\pmod{180°}$ van meghatározva.

Nyilvánvaló, hogy két metsző egyenes irányított szöge nem változik, ha a két egyenest önmagukkal párhuzamos egyenesekre cseréljük. Hogy ez az egyszerű tény nem metsző egyenesekre is érvényben maradjon, a párhuzamos és az egybeeső egyenesek irányított szögét $\pmod{180°}$ egyaránt $0°$-nak tekintjük.

Az irányított szög is additív mennyiség: $ac\sphericalangle \equiv ab\sphericalangle + bc\sphericalangle \pmod{180}$. Ez az összefüggés nyilvánvaló, ha az a, b, c egyenesek egy pontban metszik egymást vagy vannak köztük párhuzamosak a többi eset pedig az egyenesek eltolásával erre vezethető vissza.



Ha $ab\sphericalangle \equiv -15° \pmod{180°}$ és $bc\sphericalangle \equiv 60° \pmod{180°}$,

akkor $ac\sphericalangle \equiv 45° \pmod{180°}$.

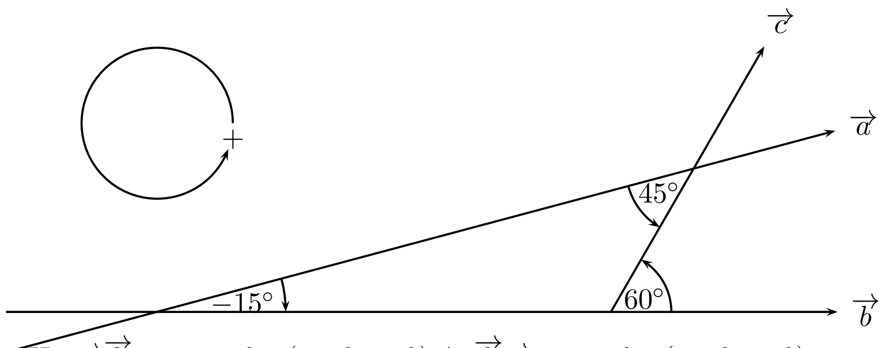
3.4. ábra.

Tegyük fel, hogy az a, b, c egyeneseken adott egy-egy irányítás. Az irányított egyeneseket jelölje $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$. Az a-t b-be képező forgatások közül bizonyosak az a-n választott irányítást a b-n választott irányításba képezik, mások az ellenkező irányításba. Az $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ irányított egyenesek irányított szögét azt a szöget értjük, jelben $\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\sphericalangle$, amellyel az a egyenes a b egyenesbe forgatható úgy, hogy egyúttal $\overrightarrow{a}$ irányítása $\overrightarrow{b}$ irányításába forduljon. Az irányított egyenesek irányított szöge $\pmod{360°}$-van meghatározva.

Egy egyenest kétféleképpen irányíthatunk, két egyenesen összesen négyféleképpen adható meg az irányítás. Az így adódó négy irányított szög $\pmod{360°}$ összesen kétféle, $\pmod{180°}$ pedig egyféle:

$$\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\sphericalangle \equiv \overleftarrow{a}\,\overrightarrow{b}\sphericalangle + 180° \equiv \overrightarrow{a}\,\overleftarrow{b}\sphericalangle + 180° \equiv \overleftarrow{a}\,\overleftarrow{b}\sphericalangle \pmod{360°}.$$

A 4. ábra egyeneseit egyféleképpen irányítva jutottunk az 5. ábrához.



Ha $\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\sphericalangle \equiv -15° \pmod{360°}$ és $\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c}\sphericalangle \equiv 60° \pmod{360°}$,
akkor $\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{c}\sphericalangle \equiv 45° \pmod{360°}$.

3.5. ábra.

Az irányított egyenesek irányított szögére is teljesül az additivitás: $\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{c} \equiv \overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b} + \overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c} \pmod{360°}$.

Irányított egyenestől való előjeles távolság

Egy egyenes két zárt félsíkra osztja a síkot. Ha az egyenes irányított, akkor rajta az irányítás szerint haladva az egyik félsík jobbra esik, a másik balra, ennek megfelelően beszélhetünk az irányított egyenes jobb oldalán illetve bal oldalán elhelyezkedő félsíkról.

A továbbiakban az irányított egyenestől való távolságot előjelesen értjük. Az irányított egyenes jobb oldali félsíkjában található pontok előjeles távolsága az irányított egyenestől pozitív, a bal oldali félsík pontjaié negatív. A P pont előjeles távolsága az $\overrightarrow{e} = AB$ egyenestől

$$d(P, \overrightarrow{e}) = d(P, AB).$$

Ha a pozitív körüljárású ABC háromszög AB, BC, CA oldalegyeneseit a betűk sorrendje szerint irányítjuk (A-tól B felé, B-től C felé illetve C-től A felé), akkor az ABC háromszög belső pontjainak távolsága mind a három oldalegyenestől pozitív. A létrejövő hét síktartományban a távolságoknak az előjelek szerint lehetséges mind a nyolc kombinációja létrejön kivéve egyet: nincs olyan pont a síkban, amelynek mind a három irányított egyenestől negatív a távolsága, tehát nincs olyan pont, amely mind a három egyenesnek a bal oldalán helyezkedik el.

3.1. Irányított mennyiségek

3.1. *Az irányított szögek összegezhetők*

Ha a_1, a_2, a_3, …, a_n tetszőleges egyenesek a síkon, akkor irányított szögeikre

$$a_1a_2\sphericalangle + a_2a_3\sphericalangle + \ldots + a_{n-1}a_n\sphericalangle \equiv a_1a_n\sphericalangle \pmod{180°},$$

illetve, ha $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$, $\overrightarrow{a_3}$, …, $\overrightarrow{a_n}$ tetszőleges irányított egyenesek a síkon, akkor irányított szögeikre

$$\overrightarrow{a_1}\overrightarrow{a_2}\sphericalangle + \overrightarrow{a_2}\overrightarrow{a_3}\sphericalangle + \ldots + \overrightarrow{a_{n-1}}\overrightarrow{a_n}\sphericalangle \equiv \overrightarrow{a_1}\overrightarrow{a_n}\sphericalangle \pmod{360°}.$$

3.2. *Fordított szög tétel*
A sík tetszőlegesen választott a, b egyeneseinek irányított szögeire $ab\sphericalangle \equiv -ba\sphericalangle \pmod{180°}$.

3.3. *Tükrözés és előjeles mérték*
Ha A, B és T egy e egyenes pontjai és A valmint B képe a T-re vonatkozó tükrözésnél A' és B', és adott e-n egy irányítás is, akkor

$$d_i(AT) = -d_i(A'T) = d_i(TA'); \qquad d_i(AB) = -d_i(A'B') = d_i(B'A').$$

Ha a és b tetszőleges egyenesek a síkban és ugyanazen sík valamely t egyenesére vonatkozó tükörképeik a' és b', akkor

$$at\sphericalangle \equiv -a't\sphericalangle \equiv ta'\sphericalangle \pmod{180°}; \qquad ab\sphericalangle \equiv -a'b'\sphericalangle \equiv b'a'\sphericalangle \pmod{180°}.$$

Ha adott a-n és b-n egy-egy irányítás is, akkor

$$\overrightarrow{a}\overrightarrow{b}\sphericalangle \equiv -\overrightarrow{a}'\overrightarrow{b}'\sphericalangle \equiv \overrightarrow{b}'\overrightarrow{a}'\sphericalangle \pmod{360°}.$$

Ha emellett t tetszőlegesen irányított, akkor

$$\overrightarrow{a}\overrightarrow{t}\sphericalangle \equiv -\overrightarrow{a}'\overrightarrow{t}\sphericalangle \equiv \overrightarrow{t}\overrightarrow{a}'\sphericalangle \pmod{360°}.$$

3.4. (M) *Merőleges szárú szögek tétele*
Ha az azonos síkban fekvő a, $a^\perp$, b, $b^\perp$ egyenesekre $aa^\perp\sphericalangle \equiv 90° \pmod{180°}$ és $bb^\perp\sphericalangle \equiv 90° \pmod{180°}$, akkor $a^\perp b^\perp\sphericalangle \equiv ab\sphericalangle \pmod{180°}$.

3.5. Ha adott az a egyenes a B pont és egy $\gamma \in [0°, 180°]$ szög akkor pontosan egy olyan b egyenes van B-n át, amelyre $ab\sphericalangle \equiv \gamma \pmod{180°}$.

3.6. (M) Döntsük el külön külön az alábbi két állításról, hogy igazak-e vagy nem!
a) Ha egy háromszög egymáshoz csatlakozó oldalainak egyenesei a, b és c, egy másik háromszögé a', b' és c' és ezek irányított szögeire

$$ab\sphericalangle \equiv a'b'\sphericalangle \pmod{180°}, \qquad bc\sphericalangle \equiv b'c'\sphericalangle \pmod{180°},$$

akkor a két háromszög szögei megegyeznek egymással.
b) Ha egy négyszög egymáshoz csatlakozó oldalainak egyenesei a, b, c és d, egy másik négyszögé a', b', c' és d' és ezek irányított szögeire

$$ab\sphericalangle \equiv a'b'\sphericalangle \pmod{180°}, \qquad bc\sphericalangle \equiv b'c'\sphericalangle, \qquad cd\sphericalangle \equiv c'd'\sphericalangle \pmod{180°},$$

akkor a két négyszög szögei megegyeznek egymással.

3.7. (M) Adott az $\overrightarrow{m}$ irányított egyenes és a μ valós szám. Keressük azoknak a P pontoknak a mértani helyét a síkon, amelyeknek az $\overrightarrow{m}$ irányított egyenestől mért előjeles távolsága μ.

3.8. (M) Adottak az egymást metsző $\overrightarrow{m}$, $\overrightarrow{n}$ irányított egyenesek és a μ, ν valós számok. Keressük azoknak a P pontoknak a mértani helyét a síkon, amelyekre

$$d(P, \overrightarrow{m}) = \mu, \qquad \text{és} d(P, \overrightarrow{n}) = \nu,$$

ahol $d(P, \overrightarrow{e})$ a P pont és az $\overrightarrow{e}$ irányított egyenes előjeles távolságát jelöli.

3.9. Mutassuk meg, hogy ha O az $\overrightarrow{m}$ irányított egyenes tetszőleges pontja és az O középpontú λ arányú középpontos nagyítás a P pontot a P' pontba képezi, akkor $\lambda d(P, \overrightarrow{m}) = d(P', \overrightarrow{m})$

3.10. (M) Legyenek adva az egymást metsző $\overrightarrow{m}$, $\overrightarrow{n}$ irányított egyenesek és a μ, ν valós számok. Keressük azoknak a P pontoknak a mértani helyét a síkon, amelyekre

$$\frac{d(P,\overrightarrow{m})}{d(P,\overrightarrow{n})}=\frac{\mu}{\nu}.$$

3.2. Előzetes vizsgálatok

3.1. Adott egy a szakasz és egy azzal párhuzamos és egyenlő hosszúságú a' szakasz, valamint egy tetszőleges e egyenes és azon egy E pontot. Vegyük fel annak a

a) tengelyes tükrözésnek a tengelyét,

b) annak a középpontos tükrözésnek a középpontját,

c) annak az eltolásnak a vektorát,

amely a-t a'-be képezi.

a', b', c') Határozzuk meg ennél a transzformációnál az E pont képét, E'-t! Mi a képek mértani helye, ha E befutja az e egyenest?

a", b", c") Vizsgáljuk az EE' egyenesek rendszerét, amint E befutja az e egyenest!

3.2. Adott a d egyenes valamint a rá nem illeszkedő A pont. Hogyan verődnek vissza az A-ból induló fénysugarak a d tükörről? (Ennek a feladatnak a megoldásához alkalmazhatunk dinamikus geometriai szerkesztőprogramot is.)

a) Szerkesszünk meg öt különböző visszaverődés után képződő sugarat!

b) Tegyünk megfigyelést, fogalmazzunk meg állítást ezen sugarak egyeneseiről!

c) Ha valaki rajzol egy egyenest, hogyan lehet róla gyorsan eldönteni, hogy az egy A-ból induló fénysugár d egyenes tükrön való tükröződéséből keletkezett?

d) Igazoljuk a b), c) pontokban megfogalmazott állításokat!

3.3. Adott az a kör és az F pont. Fussa be az A pont az a kört és minden helyzetében tekintsük a síknak azt a B pontját, amelyre az AB szakasz felezőpontja F. Határozzuk meg az így kapható B pontok mértani helyét a síkon!

a) Vegyünk fel öt különböző pontot az a körön – A_1, A_2, ..., A_5 –, és mindegyikhez szerkesszük meg a megfelelő pontot – B_1, B_2, ..., B_5.

b) Alkalmazzunk dinamikus geometriai szerkesztőprogramot a mértani hely előállításához!

c) Fogalmazzunk meg mi lesz a keresett mértani hely!

d) Bizonyítsuk be a c) pontban megfogalmazott állítást!

3.4. Adott a b egyenes és az A pont. Fussa be a B pont a b egyenest és minden helyzetében tekintsük a síknak azt a C pontját, amelyre az ABC háromszög szabályos. Határozzuk meg az így kapható C pontok mértani helyét a síkon!

a) Vegyünk fel öt különböző pontot b-n – B_1, B_2, ..., B_5 –, és mindegyikhez szerkesszük meg a megfelelő pontot abban az esetben is, amikor a háromszög pozitv körüljárású – C_1, C_2, ..., C_5 –, és akkor is, amikor negatív körüljárású – C'_1, C'_2, ..., C'_5.

b) Alkalmazzunk dinamikus geometriai szerkesztőprogramot a mértani hely előállításához!

c) Fogalmazzunk meg mi lesz a keresett mértani hely!

d) Bizonyítsuk be a c) pontban megfogalmazott állítást!

3.5. Adott a c kör és az A, B pontok. Fussa be a C pont a c kört és minden helyzetében tekintsük a síknak azt a D pontját, amelyre az $ABCD$ négyszög olyan trapéz, melynek CD alapja 3 cm. Határozzuk meg az így kapható D pontok mértani helyét a síkon!

a) Vegyünk fel öt különböző pontot a c körön – C_1, C_2, ..., C_5 –, és mindegyikhez szerkesszük meg a megfelelő pontot – D_1, D_2, ..., D_5.

b) Alkalmazzunk dinamikus geometriai szerkesztőprogramot a mértani hely előállításához!
c) Fogalmazzunk meg mi lesz a keresett mértani hely!
d) Bizonyítsuk be a c) pontban megfogalmazott állítást!

3.6. Vegyük fel az O pontot, rajta át az a és a b egyenest valamint a síkban tetszőlegesen a P pontot. Legyen a P pont az a illetve a b egyenesre vonatkozó tükörképe P_a illetve P_b. Vizsgáljuk a P_aOP_b háromszöget, ha
a) az a, b szögszárak rögzítettek és P mozog!
b) P, O, b rögzítettek és a forog!

3.7. (M) [23] Adott paralelogramma középpontján és egyik oldalának végpontjain át szerkesszünk kört és vegyük fel a középponton és a paralelogramma előzővel szemközti oldalának végpontjain átmenő kört is. Tegyünk megfigyelést, fogalmazzunk meg sejtést, próbáljuk meg bizonyítani!

3.8. (M) [23] Tűzzünk ki egy körön két pontot, A-t és B-t. Fussa be az X pont a kört, és szerkesszük meg minden helyzetében azt az Y pontot, amellyel Y az
a) $AXBY$ paralelogrammában az X-szel szemközti csúcs lesz;
b) $ABXY$ paralelogrammában a B-vel szemközti csúcs lesz.
Mi az Y pontok mértani helye?

3.3. Számolás

3.1. (MS) A P pont az O csúcsú
a) 78°-os, **b)** 110°-os,
szög a, b szárai között helyezkedik el. Jelölje A illetve B a P pontnak az a illetve a b szár egyenesére vonatkozó tükörképét. Határozzuk meg az ABO háromszög szögeit!
Változik-e az eredmény, ha P a szögtartományon kívül helyezkedik el?

3.2. (MS) A számegyenesen dolgozunk. Először a 0-ra tükrözünk. Mi lesz a
a) 10; **b)** -2
képe?
c) fejezzük ki az x képét x-szel!
d–f) Most tükrözzünk a 7-re! Mi lesz a 10, -2 és x képe?
g–i) Határozzuk meg 10,-2 és x képét az a-ra való tükrözésnél is!

3.3. (M) A számegyenesen dolgozunk. Milyen geometriai transzformációt ad meg az alábbi képlet?
a) $x \longrightarrow 2 - x$; **b)** $x \longrightarrow 2 + x$ **c)** $x \longrightarrow 2x$

3.4. (M) A koordinátasíkon dolgozunk, pontokat tükrözünk középpontosan. Az első középpont az origó. Mi lesz a
a) $(9; -3)$; **b)** $(2; 2)$; **c)** $(p; q)$
pont képe?
d–f) Most tükrözzünk a $(7, -1)$ pontra! Mi lesz az a)–c) pontok képe?
g–i) És ha az $(a; b)$ pontra tükrözünk, akkor hová képződnek az a)–c) pontok?

3.5. (MS) A koordinátasíkon dolgozunk, pontokat tükrözünk tengelyesen. Az első tengely az x-tengely. Mi lesz a
a) $(9; -3)$; **b)** $(2; 2)$; **c)** $(p; q)$
pont képe?
d)–f) Most tükrözzünk az $y = 3$ egyenletű egyenesre! Mi lesz a fenti pontok képe?

g)–i) És az $x = a$ egyenletű egyenesre való tükrözésnél hová kerülnek az a)–c) pontok?
j)–l) És az $x = y$ egyenletű egyenesre való tükrözésnél mi az a)–c) pontok képe?
m)–o) Végül tükrözzünk a fenti pontokat az $x + y = 4$ egyenletű egyenesre!

3.6. (M) A koordinátasíkon dolgozunk, olyan csúsztatva tükrözést (lásd a 4.1. feladatot) alkalmazunk a megadott pontokra, amelynek tengelye az AB egyenes, vekrora pedig az $\overrightarrow{AB}$ vektor.
Legyen először $A(0;0)$, $B(0;4)$. Mi lesz a
a) $(9;-3)$; **b)** $(2;2)$; **c)** $(p;q)$
pont képe?
d)–f) És $A(1;0)$, $B(1;4)$ esetén mi lesz a a fenti pontok képe?
g)–i) Most $A(0;0)$, $B(3;3)$. Mi lesz az a)–c) pontok képe?
j)–l) Végül $A(1;0)$, $B(3;-2)$. Határozzuk meg a amegadott pontok képét!

3.7. (M) A koordinátasíkon dolgozunk, pontokat forgatunk el 90°-kal. Az első középpont az origó. Mi lesz a
a) $(9;-3)$; **b)** $(2;2)$; **c)** $(p;q)$
pont képe?
d)–f) Forgassunk (3,0) körül! Mi lesz a fenti pontok képe?
g–l) Oldjuk meg az előző feladatokat a megadott pont körüli $-90°$-os forgatás esetén is!

3.8. A koordinátasíkon dolgozunk. Milyen geometriai transzformációt ad meg az alábbi képlet?
a) $(x;y) \longrightarrow (2-x;5-y)$; **b)** $x \longrightarrow (2+x;5+y)$ **c)** $(x,y) \longrightarrow (2-x,5+y)$
d) $(x,y) \longrightarrow (2-y,5+x)$ **e)** $(x,y) \longrightarrow (2+y,5-x)$ **f)** $(x,y) \longrightarrow (2x,y)$
g) $(x,y) \longrightarrow (-2x,-2y)$

3.9. (M) Adjuk meg azokat az egybevágósági transzformációkat (eltolást, középpontos tükrözést, tengelyes tükrözést, forgatást, csúsztatva tükrözést), amely az alább megadott A pontot A'-be és egyúttal B-t a B'-be képezi.
a) $A(2;1), B(3;1), A'(2;4), B'(3;4)$ **b)** $A(2;1), B(3;1), A'(3;4), B'(4;4)$
c) $A(2;1), B(3;1), A'(-1;4), B'(-1;5)$ **d)** $A(2;1), B(3;1), A'(0;5), B'(0;6)$

3.10. (M) Az N_1 négyzet csúcsai a koordinátarendszer alábbi pontjai:
$A(0;0)$, $B(1;0)$, $C(1;1)$, $D(0;1)$.
a) Hányféleképpen betűzhetők meg az
$(1;3)$, $(2;3)$, $(2;4)$, $(1;4)$
csúcsok az A', B', C', D' betűkkel úgy, hogy az így kapott $A'B'C'D'$ négyszög egybevágó legyen az $ABCD$ négyzettel?
b) Adjuk meg mindegyik esetben azt az egybevágósági transzformációt is (tengelyével, középpontjával, szögével, vektorával stb), amely az $ABCD$ négyzetet az $A'B'C'D'$ négyzetbe képezi!

3.4. Szerkesztések

3.1. (S) Adott az a kör, az F pont és a b egyenes. Szerkesztendő az AB szakasz úgy, hogy A illeszkedjék a-ra, B a b-re és F az AB felezőpontja legyen.
Diszkutáljuk a megoldások számát!

3.2. (S) Adott a b és a c egyenes valamint az A pont. Szerkesszünk olyan ABC szabályos háromszöget, amelynek B csúcsa a b egyenesre, C csúcsa c-re illeszkedik!
Diszkutáljuk a megoldások számát!

3.3. (S) Szerkesztendő az $ABCD$ trapéz, melynek AB és CD alapja rendre 7 cm és 4 cm, BC és DA szára pedig rendre 3 és 2 cm.

Hány ilyen trapéz van?

3.4. (MS) Adott az a és a b egyenes valamint az F pont. Szerkesztendő az AB szakasz úgy, hogy az A pont illeszkedjék az a egyenesre, B pedig a b-re és az F pont felezze az AB szakaszt.

3.5. (MS) [23] Adott két metsző kör. Szerkesszünk paralelogrammát, amelynek két csúcsa a két kör két közös pontja, harmadik csúcsa az egyik, negyedik csúcsa a másik körön van.

3.5. Középpontos tükrözés

A témában korábban volt: G.I.5.5., G.I.5.11., G.I.5.7., 3.3., 3.1., 3.4., 3.8. a).

3.1. [23] Mutassuk meg, hogy középpontos tükrözésnél

a) bármely szakasz és képe párhuzamosak vagy egy egyenesbe esnek;

b) egy egyenes pontosan akkor fix, ha átmegy a középponton.

3.2. Középpontos tükrözésnél milyen helyzetű az eredetihez képest egy

a) irányított egyenes **b)** vektor

képe? Van-e a középpontos tükrözésnek fix

c) irányított egyenese **d)** vektora?

3.3. Három pont és a sík egy pontjára középpontosan tükrözött képeik hány pontból álló ponthalmazt alkothat? 3, 4, 5, 6 közül melyik lehetséges? Ha rögzítjük a három pontot, akkor hol lehet a tükrözési középpont, hogy ne hat különböző pontot kapjunk?

3.4. **a)** Van-e olyan háromszög, amely középpontosan szimmetrikus?

b) Melyek a középpontosan szimmetrikus négyszögek?

c) És az ötszögek közül melyekeknek van középpontos szimmetriája?

3.5. (M) Adott egy paralelogramma.

a) Melyek azok az egyenesek, amelyek a paralelogrammát két egybevágó négyszögre vágják?

b) Milyen egybevágósági transzformáció viszi az egyik részt a másikba?

3.6. Adott a síkon két pont. Tükrözzük az egyiket középpontosan a másikra csak körzővel, tehát vonalzó alkalmazása nélkül!

3.7. [23] Tükrözzük a szabályos háromszöget a középpontjára. Mi lesz az eredeti és a tükrözött háromszög közös része?

3.8. Adott két párhuzamos egyenes.

Mi azon pontok mértani helye, amelyekre való tükrözés egymásba viszi a két egyenest?

3.9. (MS) Adott két pont.

a) Adjuk meg az összes olyan egyenest, amelytől a két pont egyenlő távolságra van!

b) Melyek azok az (irányított) egyenesek, amelyektől a két pont előjeles távolsága egyenlő?

c) Melyek azok az (irányított) egyenesek, amelyektől a két pont előjeles távolsága egymás ellentettje?

3.10. (M) Szerkesszünk egyenest, amely egy háromszög három csúcsától egyenlő távolságban halad.

Lásd még a 14.1., 14.2. feladatokat

3.11. (S) Adott két kör. Egyik metszéspontjukon át szerkesszünk olyan egyenest, amelyből a két kör egyenlő hosszú húrt metsz le!

3.12. Milyen alakzatot alkot
a) egy háromszög az oldalfelezőpontjára tükrözött képével együtt?
b) egy trapéz egyik szárának felezőpontjával együtt?

3.13. (S) [23] Szerkesszünk trapézt, ha ismerjük két átlóját, az átlók szögét és az egyik alapot.

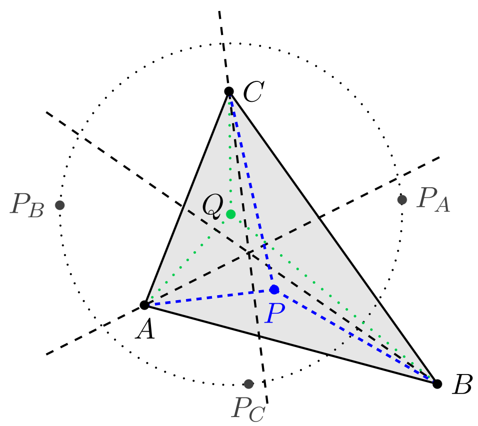
A témával kapcsolatosak még az alábbi példák is: 3.1., 3.6., 3.1., 3.2.

3.6. Tengelyes tükrözés

Korábban volt: G.I.5.1.–G.I.5.4., G.I.5.2.–G.I.5.5., G.I.5.1., G.I.5.2.
Javasolt feladatok a Geometriai feladatok gyűjteménye I. kötetből[23]: 346-348., 355., 356., 358., 359., 360., 362., 363., 364., 368., 372., 373., 374., 377., 380., 383., 384.*

3.1. (MS) Tekintsük az ABC háromszöget és a P pontot. Tegyük fel, hogy a P pontnak a háromszög AB, BC illetve CA oldalegyeneseire vonatkozó P_C, P_A, P_B tükörképei valódi háromszöget alkotnak és jelölje e háromszög körülírt körének középpontját Q.

a) Mutassuk meg, hogy a PA és QA, a PB és QB, illetve a PC és QC egyenespárok szögfelezői megegyeznek az ABC háromszög (külső és belső) szögfelezőivel (lásd az 1. ábrát)!



3.1.1. ábra.

b) Mutassuk meg, hogy a Q pontnak az ABC háromszög oldalegyeneseire vonatkozó Q_C, Q_A, Q_B tükörképei alkotta $Q_AQ_BQ_C$ háromszög körülírt körének középpontja P!

Ide tartozhat még: 5.2.

3.7. Eltolás

A témában korábban volt: G.I.5.8., G.I.5.9., 1.3., 3.8. b).

Javasoljuk még a Geometriai feladatok gyűjteménye I. kötet[23] 501., 503., 505. 507. feladatait.

3.1. (M) [17] Két R sugarú kör a T pontban érinti egymást. Az egyikre illetve a másikra illeszkedő A, B pontokra $ATB\angle = 90°$. Milyen hosszú az AB szakasz?

3.2. (MS) [17] Adott az $ABCD$ téglalap és a belsejében az M pont. Mutassuk meg, hogy van olyan konvex négyszög, amelynek oldalai az MA, MB, MC, MD szakaszokkal egyenlők, átlói merőlegesek és hosszuk a téglalap AB, CD oldalaival egyenlő.

3.3. (M) Szerkesztendő $ABCD$ négyszög, melynek oldalai $AB = 6$ cm, $BC = 10$ cm, $CD = 9$ cm, $DA = 4$ cm hosszúságúak és a szemköztes AD, BC egyenesek szöge 45°.

3.4. (MS) [13] Adott két kör és egy egyenes. Szerkesztendő az adott egyenessel párhuzamos egyenes, amelyből a körök által kimetszett húrok

a) egyenlő hosszúak;

b) hosszának összege egy előre adott szakasszal egyenlő.

3.5. (MS) Adott az e_a egyenes, a rá nem illeszkedő B_1 és C_1 pont valamint az a szakasz. Szerkesztendő az ABC egyenlő szárú háromszög, melynek AC, AB száraira illeszkedik a két adott pont, míg a hosszúságú BC alapja az e_a egyenesre illeszkedik.

3.6. (M) [13] Adott az $ABCD$ négyszög négy oldalának hossza, továbbá az AB oldal F_{AB} felezési pontját a CD oldal F_{CD} felezési pontjával összekötő szakasz. Szerkesszük meg a négyszöget!

3.7. Mutassuk meg, hogy ha egy négyszög oldalai a, b, c, d, a szemköztes a, c oldalak felezőpontját összekötő szakasz e_{ac}, a másik két oldal felezőpontját összekötő szakasz e_{bd} akkor

a) $e_{ab} \leq c + d$;

b) ha $e_{ab} = \frac{c+d}{2}$, akkor a négyszög trapéz;

c) ha $e_{ab} + e_{cd} = \frac{a+b+c+d}{2}$, akkor a négyszög paralelogramma.

A témához tartozik még: 3.8., 11.2.

3.8. Legrövidebb utak

3.1. Adott a d egyenes valamint d egyik oldalán a P és a Q pont. A d egyenesen értelmezett f függvény a $D \in d$ ponthoz a PD, DQ szakaszok hosszának összegét rendeli. Legyen pl. d az x-tengely és $P(0;1)$, $Q(4;3)$.

a) Ábrázoljuk az f függvény grafikonját!

b) Sejtsük meg mely D pontban veszi fel f a minimumát!

c) Hol lesz a minimum abban az esetben, amikor $P(0;-1)$, $Q(4;3)$ és d továbbra is az x-tengely?

3.2. (MS) Adott a d egyenes valamint d egyik oldalán a P és a Q pont. Határozzuk meg a d egyenesen azt a D pontot, amelyre a PD, DQ szakaszok hosszának összege a lehető legkisebb!

3.3. (MS) Egy szögtartomány belsejében adott a P pont. Határozzuk meg az a, b szögszárak azon A, B pontjait, amelyre a PA, AB szakaszok hosszának összege a lehető legkisebb!

3.4. (MS) Adott egy szög, csúcsa O, szárai az a, b félegyenesek, adott továbbá a szög szárai között a P pont. Határozzuk meg az a, b félegyenesek azon A, B pontjait, amelyre a PA, AB, BP szakaszok hosszának összege a lehető legkisebb!

3.5. (MS) Adott az ABC háromszög. Határozzuk meg a háromszög BC, CA, AB oldalaira illeszkedő P_A, P_B, P_C pontokat úgy, hogy a $P_AP_BP_C$ háromszög kerülete a lehető legkisebb legyen!

3.6. (MS) Mutassuk meg, hogy a háromszög oldalegyenesére való tükrözés a a talpponti háromszög két oldalegyenesét egymásra képezi.

3.7. Mutassuk meg, hogy a háromszög magasságpontja a háromszög talpponti háromszögében a beírt vagy a hozzáírt kör középpontja aszerint, hogy a háromszög hegyesszögű vagy tompaszögű.

3.8. (MS) Adottak az egymással párhuzamos e, f egyenesek és az P, Q pontok úgy, hogy a PQ szakasz mindkét adott egyenest metszi. Keressük meg az e, f egyeneseken az E és F pontot úgy, hogy EF merőleges legyen e-re és f-re és emellett a $PEFQ$ töröttvonal a lehető legrövidebb legyen!

3.9. Az adott ABC belsejében határozzuk meg azt a P pontot, amelyre a PA, PB, PC szakaszok hosszának összege a lehető legkisebb.

3.9. Forgatás

A témában korábban szereplő feladatok:
G.I.5.7., G.I.5.8., G.I.5.2., G.I.5.5., G.I.5.6., G.I.5.1., G.I.5.3.,G.I.5.4.,G.I.5.5., G.I.5.1.–G.I.5.5., G.I.18.21.,
3.4.; 3.6., 3.10, 3.2.

3.1. (M) Dolgozzunk dinamikus geometriai szerkesztőprogrammal. Vegyünk fel két egyenlő oldalhosszú szabályos hatszöget. Csúcsaik

a) azonos **b)** ellenkező

körüljárásban legyenek A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 illetve B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6 és szerkesszük meg az A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4, A_5B_5, A_6B_6 szakaszok

I. felezőpontját **II.** felezőmerőlegesét

Vizsgáljuk az így adódó egyenesek illetve pontok rendszerét! Tegyünk megfigyelést, fogalmazzunk meg sejtést!

3.2. (M) Mekkora szöget zár be egy

a) egyenes **b)** irányított egyenes

valamely O pont körül γ szöggel elforgatott képével?

3.3. (M) [23] Mutassuk meg, hogy ha két alakzat egymásba forgatható, akkor bármely két megfelelő pont meghatározta szakasz felezőmerőlegese átmegy a középponton!

3.4. (M) Vegyünk fel a síkon két egységnyi oldalú szabályos háromszöget úgy, hogy az egyik háromszög oldalai ne legyenek párhuzamosak a másik háromszög oldalaival.

a) Hány olyan forgatás van, amely az egyik háromszöget a másikba viszi?

b) Szerkesszük meg ezen forgatások centrumát!

3.5. (M) *Adott szögű elforgatás egyértelműsége*

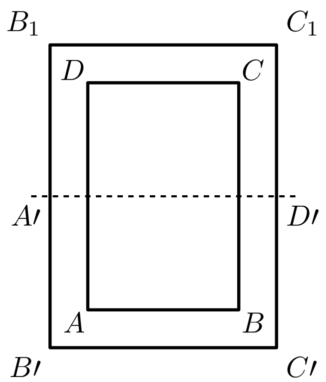
Ha adott az egymástól különböző A és B pont, valamint egy $\gamma \in (0°, 360°)$ szög akkor pontosan egy olyan O_γ pont van, amely körüli γ szögű elforgatás A-t B-be képezi.

Megjegyzés

A $\gamma = 0°$ kimaradó értékhez tartozó transzformáció az $\overrightarrow{AB}$ vektorral való eltolás.

3.6. [12] Összehajtható téglalap alakú alakú asztalt akarunk készíteni oly módon, hogy az asztallap összehajtva az $ABCD$, derékszöggel elforgatva az $A'B'C'D'$ és szétnyitva a $B_1B'C'C_1$ helyzetet foglalja el (lásd az 1. ábrát).

Hová kell elhelyeznünk a forgástengelyül szolgáló csapszeget?



3.6.1. ábra.

További feladatok a Geometriai feladatok gyűjteménye I. kötetből[23]: 462–467., 469., 473., 476.*, 479–481., 486.

3.10. Vegyes feladatok

3.1. (S) [23] Szerkesszünk háromszöget, ha adott

a) egy oldalhoz tartozó súlyvonal, az oldallal szemközti szög és egy másik oldal;

b) egy oldal, a hozzá tartozó magasság és egy másik oldalhoz tartozó súlyvonal;

c) egy oldal, a másikhoz tartozó súlyvonal és a harmadikhoz tartozó magasság;

d) három súlyvonal.

3.2. (S) [23] Szerkesszünk trapézt, ha adott a két párhuzamos oldal összege, továbbá

a) a szárak hossza és a trapéz magassága;

b) az alapon fekvő két szög és a trapéz magassága;

c) az átlók hossza és egyik szára.

3.3. (S) Adott két metsző egyenes és egy pont. Szerkesztendő négyzet, amelynek

a) középpontja; **b)** egyik csúcsa

az adott pont még egy-egy (további) csúcsa az adott egyeneseken helyezkedik el.

3.4. (S) [21] Az M pont a t területű $ABCD$ téglalap belsejében helyezkedik el. Mutassuk meg, hogy

$$t \leq AM \cdot CM + BM \cdot DM.$$

3.5. [21] Adott az ABC háromszög. Az AC egyenesnek az AB, BC egyenesekre vonatkozó tengelyes tükörképei egymást a K pontban metszik. Mutassuk meg, hogy a BK egyenes átmegy az ABC háromszög körülírt körének középpontján.

4. FEJEZET
Egybevágósági transzformációk kompozíciója

Egybevágósági transzformáció: A sík olyan önmagára való leképezése, amelynél bármely két pont távolsága megegyezik a képeik távolságával.

Egybevágósági transzformáció pl a tengelyes tükrözés, az elforgatás és az eltolás is. Van-e más?

Két egybevágósági transzformáció egymás utáni elvégzéséből származó transzformáció (a két transzformáció *kompozíciója*) is egybevágóság. Juthatunk-e ilymódon újfajta transzformációhoz?

A sík egy önmagára való leképezését *irányítástartó*nak nevezzük, ha bármelyik háromszög körüljárása megegyezik képének körüljárásával. A transzformáció *irányításváltó*, ha bármelyik háromszög és képe egymással ellentétes körüljárású. A tengelyes tükrözés irányításváltó. Páratlan sok tengelyes tükrözés kompozíciója irányításváltó, míg páros soké irányítástartó.

A sík irányítástartó egybevágóságait *mozgás*-nak is szokás nevezni.

A témához tartozó alapvető segédanyag [10][27-45. o.].

4.1. Kísérletezés

Az alábbi feladatokhoz használhatunk dinamikus geometriai szerkesztőprogramot.

4.1. Adott a k kör és annak t_1, t_2 átmérőegyenesei. Tekintsük a kör P pontját, legyen P' a P pont t_1-re tükrözött képe és P'' a P' pont t_2-re tükrözött képe. Rajzoljuk ki a PP'' egyenesek rendszerét, tegyünk megfigyelést,fogalmazzunk meg sejtést, próbáljuk meg igazolni!

4.2. Vegyük fel az egymást 30°-ban metsző t_1, t_2 egyeneseket és az ABC háromszöget, amelynek mindegyik oldala különböző.

a) Szerkesszük meg az ABC háromszög t_1-re vonatkozó $A_1B_1C_1$ tükörképét, majd annak a t_2 egyenesre vonatkozó $A_2B_2C_2$ tükörképét! Milyen ismert transzformációval kapható meg az $A_2B_2C_2$ háromszög az ABC háromszögből?

b) Végezzük el a szerkesztést úgy is, hogy előbb tükrözünk t_2-re és azután t_1-re! Így milyen transzformáció viszi az eredeti háromszöget a legvégén kapott háromszögbe?

4.3. Milyen transzformációval helyettesíthető két egymást metsző tengelyre való tükrözések egymás után elvégzéséből származó transzformáció?

4.4. Vegyük fel az egymással párhuzamos, egymástól 2 cm távolságra lévő t_1, t_2 egyeneseket és az ABC háromszöget, amelynek mindegyik oldala különböző.

a) Szerkesszük meg az ABC háromszög t_1-re vonatkozó $A_1B_1C_1$ tükörképét, majd annak a t_2 egyenesre vonatkozó $A_2B_2C_2$ tükörképét! Milyen ismert transzformációval kapható meg az $A_2B_2C_2$ háromszög az ABC háromszögből?

b) Végezzük el a szerkesztést úgy is, hogy előbb tükrözünk t_2-re és azután t_1-re! Így milyen transzformáció viszi az eredeti háromszöget a legvégén kapott háromszögbe?

4.5. Milyen transzformációval helyettesíthető két egymással párhuzamos tengelyre való tükrözések egymás után elvégzéséből származó transzformáció?

4.6. Milyen transzformációval helyettesíthető három egymást metsző tengelyre való tükrözések egymás után elvégzéséből származó transzformáció?

4.7. Milyen transzformációval helyettesíthető három egymással párhuzamos tengelyre való tükrözések egymás után elvégzéséből származó transzformáció?

4.8. Adottak az egy ponton átmenő f_a, f_b, f_c egyenesek. Szerkesszünk olyan ABC háromszöget, amely A-nál, B-nél, C-nél fekvő belső szögének belső szögfelezője rendre f_a, f_b, f_c! Hány ilyen háromszög van?

4.9. Adottak az egy ponton átmenő f_a, f_b, f_c egyenesek. Szerkesszünk olyan ABC háromszöget, amelyben a BC, CA, AB oldal felezőmerőlegese rendre f_a, f_b, f_c! Hány ilyen háromszög van?

4.2. Egybevágósági transzformációk tükrözésekből

4.1. (M) Adott a síkon az A és a B, valamint az A' és a B' pont, melyekre $|\overline{AB}| = |\overline{A'B'}|$. Mutassuk meg, hogy pontosan két olyan egybevágósági transzformáció van, amelyik az A pontot A'-be, a B pontot pedig B'-be képezi és igazoljuk, hogy az egyik transzformáció irányítástartó, a másik pedig irányításváltó!

4.2. Mutassuk meg, hogy a sík minden irányítástartó egybevágósága (azaz mozgása) előáll két tengelyes tükrözés, minden irányításváltó pedig három tengelyes tükrözés kompozíciójaként.

4.3. Adott a síkon két háromszög, ABC és $A'B'C'$, melyek megfelelő oldalai egyenlőek: $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $CA = C'A'$. Mutassuk meg, hogy egy és csakis egy olyan egybevágósági transzformáció van, amelynél az A, B és C csúcs képe rendre A', B' és C'.

4.4. Igazoljuk, hogy a sík irányítástartó egybevágósága háromféle lehet:

– identitás – a két tengely egybeesik;

– eltolás – a két tengely párhuzamos;

– elforgatás – a két tengely metszi egymást.

4.3. Középpontos tükrözés

4.1. Van-e olyan alakzat, amely pontosan két középpontra szimmetrikus középpontosan?

4.2. Adottak egy

a) háromszög **a)** négyszög

oldalfelezőpontjai. Szerkesszük meg a háromszöget (négyszöget)!

4.3. Adottak egy

a) háromszög **b)** négyszög **c)** ötszög

oldalfelezőpontjai. Szerkesszük meg a sokszöget!

4.4. Mutassuk meg, hogy két középpontos tükrözés kompozíciója eltolás!

4.5. Mely esetekben lesz három középpontos tükrözés kompozíciója is középpontos tükrözés?

4.4. Csúsztatva tükrözés

4.1. Definíció: Ha adott egy $\overrightarrow{v}$ vektor és egy azzal párhuzamos t egyenes, akkor a t tengelyre vonatkozó tükrözés és a $\overrightarrow{v}$ vektorral való eltolás kompozícióját, tehát az ezek egymás utáni elvégzéséből álló transzformációt, *csúsztatva tükrözés*nek nevezzük. A t tengely és a $\overrightarrow{v}$ vektor a csúsztatva tükrözés tengelye illetve vektora.

Számít-e az eltolás és a tükrözés sorrendje? Másik transzformációt kapunk, ha fordított sorrendben végezzük el a tükrözést és a tengelyével párhuzamos eltolást?

4.2. A sík a, b és c egyenesei közül az első kettő párhuzamos egymással, míg c merőleges rájuk. Az alábbi összetett transzformációk közül hány különböző van?

$$a \circ b \circ c, \qquad a \circ c \circ b, \qquad b \circ a \circ c, \qquad b \circ c \circ a, \qquad c \circ a \circ b, \qquad c \circ b \circ a$$

4.3. Adjuk meg mindazokat a csúsztatva tükrözéseket, amelyek önmagába képezik a végtelen négyzetrácsot!

4.4. (M) Határozzuk meg a csúsztatva tükrözés

a) fixpontjait, **b)** fixegyeneseit!

4.5. Mutassuk meg, hogy csúsztatva tükrözésnél bármely pontot a képével összekötő szakasz felezőpontja illeszkedik a csúsztatva tükrözés tengelyére!

4.6. (M) Adott a síkon két pont és két egyenes: A, A', a és a', az A pont illeszkedik az a egyenesre, az A' pont pedig az a' egyenesre. Adjuk meg mindazokat a csúsztatva tükrözéseket, amelyek az A pontot az A'-pontba az a egyenest pedig az a' egyenesre képezik!

4.7. (M) Három tengelyes tükrözés kompozíciója

– tengelyes tükrözés, ha a három tengely egy közös ponton megy át, vagy mind párhuzamosak egymással;

– csúsztatva tükrözés, ha a három tengely nem megy át egy közös pontos és nem is mind párhuzamos egymással.

4.8. Mutassuk meg, hogy ha egy irányításváltó egybevágóság nem tengelyes tükrözés, akkor csúsztatva tükrözés.

4.9. *Hjelmsev tétele*

Igazoljuk, hogy ha ABC és $A'B'C'$ ellenkező körüljárású egybevágó háromszögek, akkor az AA', BB', CC' szakaszok felezőpontjai egy egyenesen vannak!

4.10. Mutassuk meg, hogy az a, b, c egyenesekre pontosan akkor teljesül, hogy egy ponton mennek át vagy párhuzamosak, ha az $(a \cdot b \cdot c)^2$ transzformáció (ahol az egyenesre vonatkozó tükrözést ugyanazzal a betűvel jelöltük, mint magát az egyenest) az identitás, azaz

$$a \circ b \circ c \circ a \circ b \circ c = id.$$

4.11. (M) Mutassuk meg a tengelyes tükrözések és kompozíciók tulajdonságai segítségével, hogy a háromszög

a) oldalfelező merőlegesei **b)** szögfelezői

egy ponton mennek át (vagy párhuzamosak)!

4.12. (MS) [13] Az ABC háromszög oldalegyenesei $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$, a magasságok talppontjai $T_C \in AM$, $T_A \in BC$, $T_B \in CA$. Tekintsük az a, b, c egyenesekre vonatkozó tükrözések $a \circ b \circ c$ kompozícióját – először c-re, majd b-re, végül a-ra tükrözünk.

a) Mutassuk meg, hogy az a transzformáció olyan csúsztatva tükrözés, amelynek tengelye a talpponti háromszög T_CT_A oldala!

b) Fejezzük ki a csúsztatva tükrözés eltolásvektorának hosszát a $T_AT_BT_C$ talpponti háromszög oldalaival!

4.13. (M) A konvex $ABCD$ négyszög AB és CD oldalai egyenl? hosszúak, az átlóit felez? E és F pontok különböz?k. Bizonyítsuk be, hogy az EF egyenes az AB és CD oldalakkal egyenl? szögeket zár be!

4.5. Forgatások kompozíciója feladatokban

4.1. (M) [7] Az ABC háromszög AB, BC oldalaira, mint átfogókra, kifelé állítottuk az ABP, BCQ egyenlő szárú derékszögű háromszögeket. Határozzuk meg a $PKQ\angle$ szög nagyságát, ahol K az AC szakasz felezőpontja.

4.2. Az a, b egyenesek szöge 36°. Egy $A_0 \in a$, $B_0 \in b$ pontpárból ($A_0B_0 = \sigma$) kiindulva képezzük az $A_k \in a$, $B_k \in b$ sorozatot az

$$B_{k-1}A_k = A_kB_k \qquad A_k \neq A_{k-1}, \qquad B_k \neq B_{k-1}$$

szabályok szerint. Igazoljuk, hogy a sorozat periódikus. Mi a periódusa?

4.3. (M) Ismeretes, hogy egy konvex négyszögbe pontosan akkor írható kör, ha a szemköztes oldalak hosszának összege egyenlő:

$$a + c = b + d.$$

Általánosítsuk a formulát! Adott a síkon négy egyenes, melyek közül semelyik három sem megy át egy ponton. Mi annak a feltétele, hogy legyen olyan kör, amely mind a négy egyenest érinti? Adjuk meg ennek feltételét a négyszög oldalai hosszának segítségével!

4.4. (M) Az ABC háromszög AB oldalán adott a D pont. Jelölje P az ACD, BCD háromszögekbe írt körök AB-tól különböző közös külső érintőjének a CD szakasszal való metszéspontját. Igazoljuk, hogy a CP szakasz hossza független a D pont választásától!

4.5. (M) Az ABC háromszög AB oldalán adott a D pont. Jelölje T az ABC háromszögbe írt kör és az AB oldal érintési pontját. Mutassuk meg, hogy T illeszkedik az ACD, BCD háromszögekbe írt köröknek egy AB-tól különböző közös érintőjére is!

4.6. Szimmetriák

Korábban volt a témában: **??**.

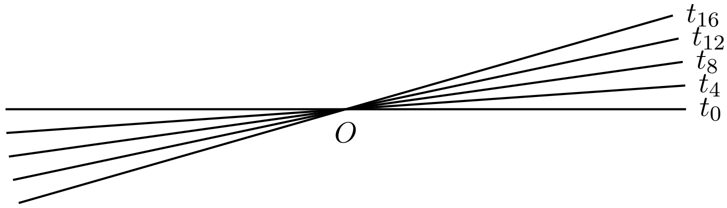
4.1. A t_0, t_4, t_8, t_{12}, t_{16} egyenesek egymást az O pontban metszik és az 1. ábrán látható módon helyezkednek el, a szomszédos egyenesek szöge mind a négy szomszéd-pár esetén éppen 4°. Igaz-e, hogy ha egy alakzat tükrös

a) t_0-ra és t_8-ra, akkor t_{16}-ra is tükrös?

b) t_0-ra és t_{16}-ra, akkor t_8-ra is tükrös?

c) t_0-ra és t_8-ra, akkor t_4-re is tükrös?

Bizonyítsunk, illetve mutassunk ellenpéldát!



4.1.1. ábra.

4.2. (M) Van-e olyan alakzat, amely egybevágó önmaga egy valódi részhalmazával?

5. FEJEZET
Kerületi szögek I.

A fejezet témájával kapcsolatban lásd még a a Geometriai feladatok gyűjteménye I. kötet[23] hasonló című fejezetének példáit.

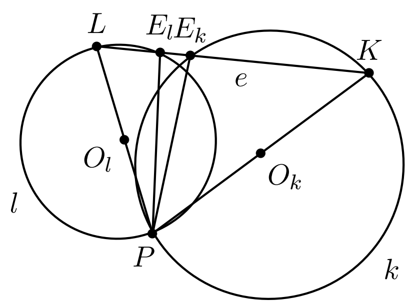
5.1. Ismétlés: Thalesz tétele

5.1. Vegyük fel a síkon az egymástól különböző A és O pontot. Vegyünk fel egy A ponton átmenő a egyenest és szerkesszük meg a-nak az O pont körüli 90°-os elforgatottjával vett $a \cap O^{90^\circ}(a)$ metszéspontját!

a) Szerkesszük meg tíz különböző A-n átmenő egyenesre ezt a metszéspontot és vizsgáljuk az így kapott tíz pont elhelyezkedését!

b) Dinamikus geometriai szerkesztőprogrammal rajzoljuk meg az így kapható pontok mértani helyét (tehát A, O rögzített, míg a befutja az összes A-n átmenő egyenest)!

5.2. (S) Dr Agy megrajzolta a k, l körök P metszéspontján át (lásd az 1. ábrát) a körök PK, PL átmérőit. Ábráján az $e = KL$ egyenes k-t még E_k pontban, l-t még E_l-ben metszette.



5.2.1. ábra.

a) Igazoljuk, hogy az 1. ábrán $PE_kK\angle = PE_lL\angle = 90°$!

b) A PE_kE_l háromszögnek két derékszöge is van. Lehetséges ez?

5.3. a) Mutassuk meg, hogy a hegyesszögű háromszög belső pontjából az oldalakra állított merőleges szakaszok a háromszöget három húrnégyszögre bontják!

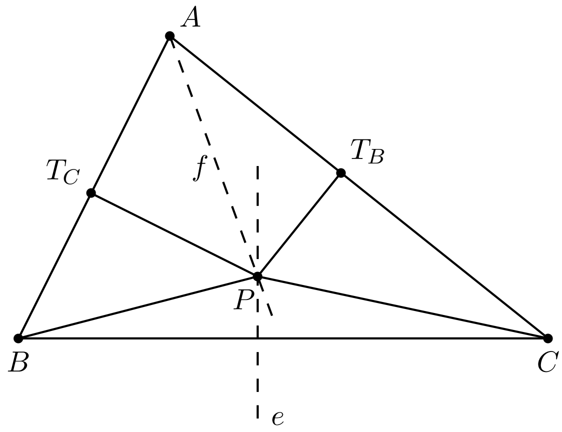
b) Hogyan módosítsuk tartalmasan az állítást, hogy tompaszögű háromszögre, illetve a háromszög külsejében választott pontra is teljesüljön?

5.4. Jelölje az ABC háromszög magasságpontját M, a magasságvonalak talppontjait T_A, T_B, T_C. Az említett hét pont $(A, B, C, M, T_A, T_B, T_C)$ közül hányféleképpen választható ki négy, amelyek egy körön vannak az ABC háromszög tetszőleges választása esetén?

5.2. Előzetes vizsgálatok

5.1. *Minden háromszög szabályos*

Dr Agy megszerkesztette az ABC háromszög BC oldalának e felezőmerőlegesét valamint a háromszög A-nál fekvő szögének f szögfelezőjét. Ezek metszéspontját ábráján P jelöli, míg P-ből az AC, AB oldalakra állított merőlegesek talppontját T_B illetve T_C (lásd az 1. ábrát).



5.1.1. ábra.

Dr Agy így gondolkodik:

1. A P pont a BC szakasz felezőmerőlegesén van, így $BP = CP$.

2. A P pont a BAC szög szögfelezőjén van, és a szögfelező pontjai a száraktól egyforma távolságra vannak, így $PT_C = PT_B$.

3. Ha két derékszögű háromszögben egyenlők az átfogók és az egyik befogó is, akkor a két háromszög másik befogója is egyenlő egymással.

4. A PT_CB, PT_BC háromszögek T_C-ben illetve T_B-ben derékszögűek, így az előbbi 1., 2. és 3. állítások miatt $BT_C = CT_B$.

5. A PT_CA, PT_BA háromszögek T_C-ben illetve T_B-ben derékszögűek, PA oldaluk közös, így az előbbi 2. és 3. állítások miatt $AT_C = AT_B$.

6. A 4., 5. állításokból következik, hogy $AB = AC$. Valóban $AB = AT_C + T_CB$, $AC = AT_B + T_BC$ és ha egyenlőkhöz egyenlőket adunk, akkor egyenlőket kapunk.

7. Ehhez hasonlóan bármely háromszög bármelyik két oldaláról igazolható, hogy egyenlő hosszúságúak, tehát minden háromszög szabályos.

Tehát minden háromszög szabályos? Van-e hiba Dr Agy gondolatmenetében? Ha igen, hol?

5.2. Igazoljuk, hogy ha a k kör A, B, C, D pontjai úgy helyezkednek el, hogy a k kör $\widehat{BC}$ irányított íve egyenlő a kör $\widehat{DA}$ irányított ívével, akkor az AB, CD egyenesek párhuzamosak!

5.3. (MS) Dolgozzunk dinamikus geometriai szerkesztőprogrammal!

Vegyünk fel egy kört (k) és rajta három pontot (A, B, C). Szerkesszük meg a kör A pontot nem tartalmazó BC ívének felezőpontját (H_A).

a) Tükrözzük a B pontot az AH_A szakasz felezőmerőlegesére (B'). Vizsgáljuk az ábrát, tegyünk megfigyelést, fogalmazzunk meg sejtést a $H_AB'AC$ négyszöggel kapcsolatban, próbáljuk meg igazolni!

b) Vizsgáljuk a $BAH_A\sphericalangle$, $H_AAC\sphericalangle$ szögek nagyságát!

5.4. (S) Vegyük fel a P pontot az $ABCD$ négyzet k körülírt körének rövidebbik $\widehat{BC}$ ívén és határozzuk meg a

a) $APC\sphericalangle$, **b)** $APD\sphericalangle$, **c)** $BPA\sphericalangle$, **d)** $BPC\sphericalangle$

szöget!

5.5. Vegyük fel a síkon az egymástól különböző A és O pontot. Vegyünk fel egy A ponton átmenő a egyenest és szerkesszük meg a-nak az O pont körüli $+60°$-os elforgatottjával vett $a \cap O^{60°}(a)$ metszéspontját!

a) Szerkesszük meg tíz különböző A-n átmenő egyenesre ezt a metszéspontot és vizsgáljuk az így kapott tíz pont elhelyezkedését!

b) Dinamikus geometriai szerkesztőprogrammal rajzoljuk meg az így kapható pontok mértani helyét (tehát A, O rögzített, míg a befutja az összes A-n átmenő egyenest)!

5.6. Vegyük fel a sík egy A pontját és rögzítsünk egy τ elforgatást, tehát vegyünk fel egy A-tól különböző O forgási középpontot és egy φ irányított szöget.

Tekintsünk egy A ponton átmenő a egyenesnek az elforgatásnál származó képével alkotott $P = a \cap \tau(a)$ metszéspontját. Szerkesszünk meg körzővel és vonalzóval 10 ilyen P pontot, vagy rajzoltassuk ki a P-k mértani helyét dinamikus geometriai szerkesztőprogrammal (tehát A, O, φ rögzített, míg a befutja az összes A-n átmenő egyenest)!

Próbáljuk úgy szerkeszteni a rajzot, hogy a φ szöget is változtathassuk, vizsgálhassuk a mértani hely változását φ értékének változása közben. Készítsünk színes ábrát, ahol a különböző φ értékekhez tartozó mértani helyek különbözős színben láthatók!

5.7. Vegyük fel a sík két pontját, A-t és B-t és rögzítsünk egy φ irányított szöget. Keressük azokat a P pontokat, amelyekre az $APB\sphericalangle$ irányított szög φ-vel egyezik meg.

Szerkesszünk meg körzővel és vonalzóval 10 ilyen P pontot, vagy rajzoltassuk ki a P-k mértani helyét dinamikus geometriai szerkesztőprogrammal!

5.8. (S) Igazoljuk, hogy ha egy négyszög csúcsai egy körön vannak (húrnégyszög), akkor két szemköztes belső szögének összege egyenlő a másik két szemközti szögének összegével.

5.3. Tételek

5.1. (M) Legyen adva a síkon az egymástól különböző A és B pont továbbá egy $\gamma \in (0°, 180°)$ szög. Jelölje O azt a pontot, amely körüli 2γ szögű elforgatás A-t B-be képezi és legyen k az O középpontú A-t és B-t tartalmazó kör.

a) Azon C pontok mértani helye, amelyekből az AB irányított szakasz γ szögben látszik, tehát

$$ACB\sphericalangle \equiv \gamma \pmod{180°}, \tag{1}$$

a k kör A-tól és B-től különböző pontjainak halmaza.

b) Ha $A = C$ (ill. $B = C$) esetén AC (ill. BC) egyenesen a k kör A-beli (ill. B-beli) érintőjét értjük, akkor a (1) összefüggés ezekben az esetekben is teljesül.

Definíció

A tételben szereplő k kört az AB szakasz γ szögű látókörének nevezzük. Ha a $ACB \equiv \gamma$ (mod 180°) akkor azt mondjuk, hogy az AB szakasz γ szögben látszik a C pontból.

5.2. Mutassuk meg, hogy ha egy (irányított) szakasz két adott pontból egyenlő (irányított) szögben látszik (mod 180°), akkor ez a két pont a szakasz két végpontjával egy körön helyezkedik el!

Formálisan: Ha A és B különböző pontok és az e_A, f_A, e_B, f_B egyenesekre

$$A = e_A \cap f_A, \qquad B = e_B \cap f_B,$$

és

$$e_A e_B\sphericalangle \equiv f_A f_B\sphericalangle \not\equiv 0° \pmod{180°},$$

akkor az

$$A, \qquad B, \qquad e_A \cap e_B, \qquad f_A \cap f_B$$

pontok egy körön vannak.

5.3. Mutassuk meg, hogy egy négyszög pontosan akkor húrnégyszög, ha szemköztes szögeinek összege 180°.

5.4. *Egyenlő hosszú húrok kerületi szöge is egyenlő*
Mutassuk meg, hogy ha AB és CD a k kör egyenlő hosszúságú húrjai és a k kör P, Q pontjai úgy helyezkednek el, hogy a k kör P a a kör tetszőleges pontjai (de $P \neq A$, $P \neq B$, $Q \neq C$, $Q \neq D$, akkor $APB\angle = CQD\angle$ vagy $APB\angle = 180° - CQD\angle$.

5.5. (S) Tekintsük az AB szakasz fölötti, α szöghöz tartozó látókörívek egyikét és az AB egyenesnek e látókörívvel azonos félsíkjában egy tetszőleges P pontot, amely nincs az AB egyenesen. Az $APB\angle$ szög
– egyenlő α-val, ha P a látóköríven van,
– kisebb α-nál, ha P a látóköríven kívül van,
– nagyobb α-nál, ha P a látókörív belsejében van.

5.6. (M) Adott két pont, A és B. Mi azon C pontok mértani helye a síkon, amelyekre az AC, BC *irányított* egyenesek *irányított* szöge
a) 180° **b)** 0° **c)** 90°
ha mod 360° számolunk?
d) Általában mi lesz egy adott γ szöghöz tartozó mértani hely, ha mod 360° számolunk?

Az *ívhez tartozó kerületi szög* fogalmával kapcsolatban lásd az 5.5. feladatot.

5.4. Egyszerűbb szerkesztési feladatok

5.1. **a)** Szerkesszünk 3 cm sugarú körbe olyan húrt, amelyhez a kör egyik ívén 30°-os kerületi szög tartozik!
b) Milyen messze van ez a húr a kör középpontjától?
c) Adott a 4 cm hosszú AB szakasz. Szerkesszük meg azon P pontok halmazát, amelyre $APB\angle = 30°$ (most az irányatatlan szög nagyságát – tehát az irányított szög abszolút értékét – írtuk elő).

5.2. **a)** Szerkesszünk 3 cm sugarú körbe olyan húrt, amelyhez a kör egyik ívén 120°-os kerületi szög tartozik!
b) Milyen messze van ez a húr a kör középpontjától?
c) Adott a 4 cm hosszú AB szakasz. Szerkesszük meg azon P pontok halmazát, amelyre $APB\angle = 120°$.

5.3. **a)** Szerkesszük meg azon pontok mértani helyét, ahonnan egy adott szakasz előre adott szögben látszik!
b) Adott az A és a B pont, valamint a γ irányított szög. Szerkesszük meg azon P pontok mértani helyét, amelyekre $APB\sphericalangle \equiv \gamma \pmod{180°}$.

5.4. Szerkesztendő háromszög az alábbi adatokból:
a.1.) $a = 3$ cm, $\alpha = 15°$, $m_a = 8$ cm;
a.2.) $a = 8$ cm, $\alpha = 135°$, $m_a = 1{,}5$ cm;
b.1.) $a = 3$ cm, $\alpha = 30°$, $s_a = 4$ cm.
b.2.) $a = 8$ cm, $\alpha = 120°$, $s_a = 3$ cm.
c) Adjuk meg a szerkesztési eljárást és diszkutáljuk az a), b) feladatokat az általános esetben!

5.5. (M) Szerkesztendő a háromszög, ha ismerjük az egyik csúcsánál fekvő szögét és az ebből a csúcsból induló magasság és súlyvonal hosszát.

5.6. (S) Szerkesztendő a háromszög, ha ismerjük az egyik csúcsánál fekvő szögét, az ebből a csúcsból induló súlyvonal hosszát, továbbá a közrefogó két oldal hosszának összegét.

5.7. Szerkesszünk adott négyzet belsejében olyan pontot, amelyből két szomszédos oldal egyike 90°-os, másika 120°-os szögben látszik!

5.8. Szerkesztendő az 5 cm oldalú $ABCD$ négyzet CD oldalegyenesén olyan P pont, amelyre az $APB\angle$ nagysága
a) 30°, **b)** 45°, **a)** 60°.

5.9. Adott az AB szakasz, az e egyenes és a γ irányított szög. Szerkesztendő az e egyenesen olyan P pont, amelyre $APB\sphericalangle \equiv \gamma \pmod{180°}$.

5.10. Szerkesztendő paralelogramma, melyben az átlók hossza 5 és 10 cm, egyik belső szöge pedig
a) 135°, **b)** 60°.

5.11. Szerkesztendő négyszög, ha adott két átlója, két szomszédos oldala és a másik két oldal alkotta szög.

5.12. **a)** Az ABC szabályos háromszög körülírt körének szerkesszük meg olyan AB-vel párhuzamos húrját, amelyhez a körülírt körben 45°-os kerületi szög tartozik!
b) Szerkesszünk adott körbe adott egyenessel párhuzamos húrt, amelyhez adott kerületi szög tartozik!

Néhány nehezebb szerkesztés a Geometriai feladatok gyűjteménye I. kötetből[23], ahol a nehézséget az okozza, hogy megfelelő transzformáció alkalmazására is szükség van: 375., 381., 484.,

5.5. Egyszerű számítási feladatok

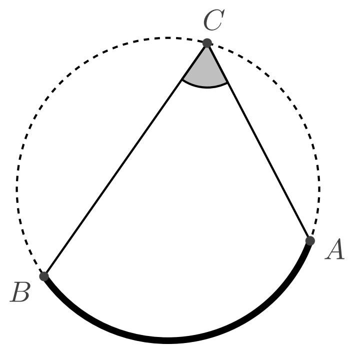
5.1. Az ABC háromszög AB oldalának hossza 10 egység, míg a $BCA\angle$ nagysága
a) 30°, **b)** 45°, **c)** 60°, **d)** 90°, **e)** 120°, **f)** 135°,
g) 150°.
Milyen messze van a háromszög körülírt körének középpontja az AB oldal egyenesétől? Határozzuk meg a háromszög körülírt körének sugarát is!

5.2. Határozzuk meg az ABC háromszög C csúcsnál fekvő belső szögének nagyságát, ha a vele szemközti oldal hosszának és a körülírt kör sugarának $\frac{c}{R}$ aránya
a) 2, **b)** $\sqrt{3}$, **c)** $\sqrt{2}$, **d)** 1!

5.3. Igaz-e, hogy adott körben
a) kétszer akkora húrhoz kétszer akkora kerületi szög
b) kétszer akkora kerületi szöghöz kétszer akkora húr
tartozik?

5.4. Az egységnyi hosszúságú szakasz α szögű látókörének sugarát jelölje R_α, a húr és a kör középpontjának távolságát d_α. Pl $R_{90^\circ} = \frac{1}{2}$, $d_{90^\circ} = 0$. Határozzuk meg
a) R_{45°, d_{45°, **b)** $R_{22,5^\circ}$, $d_{22,5^\circ}$,
értékeit illetve
c) fejezzük ki $R_{\frac{\alpha}{2}}$ és $d_{\frac{\alpha}{2}}$ értékét R_α és d_α segítségével!

5.5. Ha adott az O középpontú k kör és annak egy i íve (lásd az 1. ábrát), akkor az i ív A, B végpontjait a k kör i-hez nem tartozó C pontjával összekötő szakaszok $ACB\angle$ szögét az *i ív kerületi szögének* nevezzük. Míg adott körben adott húrhoz kétféle kerületi szög tartozhat, addig adott körben az ívhez tartozó kerületi szög nagysága egyértelmű. Az ívhez tartozó középponti szög annak az AOB szögnek a nagysága, amely tartalmazza az i ívet. Ha tehát az i ív nagyobb egy félkörnél, akkor ez a középponti szög nagyobb 180°-nél.



5.5.1. ábra.

Igaz-e, hogy adott körben
a) kétszer akkora ívhez kétszer akkora kerületi szög
b) kétszer akkora kerületi szöghöz kétszer akkora ív
tartozik?
Mutassuk meg, hogy
c) bármely ív középponti szöge kétszer akkora, mint az ív kerületi szöge!

5.6. Határozzuk meg az egységsugarú kör
a) $\frac{11}{6}\pi$, **b)** $\frac{7}{6}\pi$, **c)** π, **d)** $\frac{5}{6}\pi$, **e)** $\frac{1}{6}\pi$
hosszúságú ívéhez tartozó kerületi szögét!

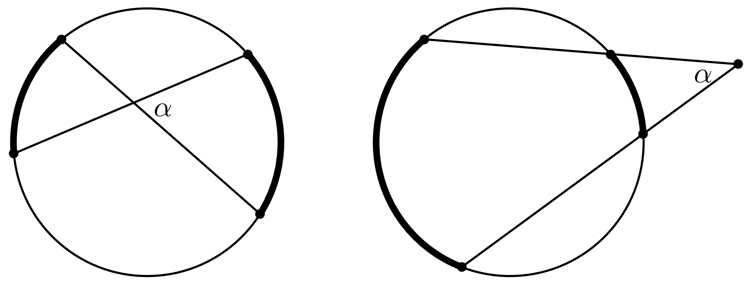
5.7. [23] Egy háromszög két oldala a köréírt körből 128°-os illetve 70°-os köríveket metsz le. Mekkorák a háromszög szögei?

5.8. [23] A kört egy húrja két ívre vágja. Az egyik ív pontjaiból a húr 132°-os szögben látszik. Mekkora szögben látszik a húr a másik ív pontjaiból?

5.9. [23] Egy pontból a körhöz húzott két érintő egymással 65°-os szöget zár be. Mekkora szögben látszik az érintési pontokat összekötő húr a kör pontjaiból?

5.10. (S) Az ABC háromszög szögei: $ABC\angle = 68°$, $BCA\angle = 83°$, $CAB\angle = 29°$. A háromszög körülírt középpontja O, a B, C csúcsokhoz tartozó magasságok talppontja rendre T_B és T_C, míg a BC oldal felezőpontja F_A. Határozzuk meg az alábbi szögek nagyságát!
a) $AOC\angle$, **b)** $F_AOC\angle$, **c)** $BT_BT_C\angle$, **d)** $T_BAT_C\angle$.

5.11. (S) [23] Az 1. ábrán a vastagon húzott ívek kerületi szögeit ismerjük. Számítsuk ki ezek segítségével az α szög nagyságát!



5.11.1. ábra.

5.6. Gyakorló feladatok

5.1. (M) Két konvex négyszög megfelelő oldalai párhuzamosak és az egyik húrnégyszög. Következik-e ebből, hogy a másik is az?

5.2. (M) Két húrnégyszög köré írt körének sugara megegyezik és megegyeznek a megfelelő szögeik is. Következik-e ebből, hogy egybevágók?

5.3. (M) Két húrnégyszög köré írt körének sugara megegyezik és megegyeznek a megfelelő szögeik is. Milyen további adataik egyenlőségére következtethetünk ebből?

Ajánljuk a Geometriai feladatok gyűjteménye alábbi példáit:
„Tájékozódás”: 992., 993.,
„Legjobb szög”: (996., 997.,) 998., 999., 1000.
Speciális húrnégyszögek: 1051.–1055.,
Általános talppontok és húrnégyszögek 1063., 1065.–1066.
Húrnégyszög szerkesztések: 1067. – 1069.
Szerkesztések: 1002.–1012., 1038. – 1041., 1044.–1045.
Izogonális pont: 1016.–1019.
Érintkező körök: 1020.–1021., 1034.–1036. illetve lásd az idevágó feladatokat a 8. fejezetben!

6. FEJEZET

Kerületi szögek II.

6.1. Kísérletek

6.1. Adott a k kör és rajta az A és a B pont. Futtassunk a C pontot k-n és vizsgáljuk a $BCA\angle$ külső és belső szögfelezőjét!

6.2. (S)

Dolgozzunk dinamikus geometriai szerkesztőprogrammal!

a) Adott a k kör és rajta az A és a B pont. Futtassuk a C pontot a körön és minden helyzetében mérjük fel az AC oldal C-n túli meghosszabbítására a $CB' = CB$ szakaszt. Vizsgáljuk a B' pont mértani helyét!

b) Fogalmazzunk meg sejtést és bizonyítsuk is be!

6.3. A k, l körök az A, B pontokban metszik egymást. Forgassunk egy egyenest A-n át és minden helyzetében képezzük k, l körökkel alkotott (A-tól különböző) K és L metszéspontját.

Vizsgáljuk a KLB háromszögek rendszerét illetve e háromszög nevezetes pontjainak mértani helyét!

6.4. Dolgozzunk dinamikus geometriai szerkesztőprogrammal! Itt nem várunk bizonyítást, hanem kísérletezést, sejtés megfogalmazását.

Adott az ABC háromszög.

a) Keressük azokat a P pontokat, amelyeknek a háromszög oldalaira vonatkozó P_A, P_B, P_C tükörképei egy egyenesre illeszkednek.

b) Keressük azokat a p egyeneseket, amelyeknek a háromszög oldalaira vonatkozó p_A, p_B, p_C tükörképei egy ponton mennek át vagy párhuzamosak.

6.5. Adott az ABC háromszög és a P pont. Vizsgáljuk dinamikus geometriai szerkesztőprogrammal a P ponton átmenő p egyenesnek a háromszög oldalaira vonatkozó p_A, p_B, p_C tükörképei határolta háromszög nevezetes pontjainak mértani helyét, ha p befutja az összes P-n átmenő egyenest! Sejtések megfogalmazását várjuk.

6.6. Jelölje az egység átmérőjű kör $h \in [0; 1]$ hosszú húrjához tartozó kisebb (nem nagyobb) ívének hosszát $\alpha(h)$, míg az $\alpha \in \mathbb{R}$ hosszúságú körív végpontjait összekötő húr hosszát $h(\alpha)$.

Rajzoltassuk ki dinamikus geometriai szerkesztőprogrammal a h, α függvényeket!

6.2. Két metsző kör

6.1. (M) A k, l körök az A, B pontokban metszik egymást. Tekintsük a k körön a K pontot és képezzük a KA egyenes és az l kör második metszéspontjaként az L pontot.

a) Mutassuk meg, hogy a KBL háromszög hasonlóság erejéig egyértelmű, független a K pont választásától!

b) Hogyan függ a $KBL\angle$ szög a k, l körök szögétől?

Definíció: Két metsző kör szögén a körök (bármelyik) metszéspontjában a körökhöz húzott érintőegyenek szögét értjük.

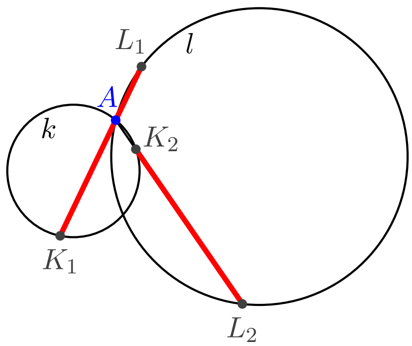
6.2. (MS) A k, l körök az A, B pontokban metszik egymást. Tekintsük a k körön a K pontot és képezzük a KA, KB egyenesek és az l kör második metszéspontjait, az L_A, L_B pontokat. A k kör mely K pontjára lesz az L_AL_B szakasz hossza maximális?

6.3. Adott két metsző kör és egy szakasz. Szerkesztendő a körök egyik metszéspontján át

a) az előre adott szakasszal egyenlő hosszúságú

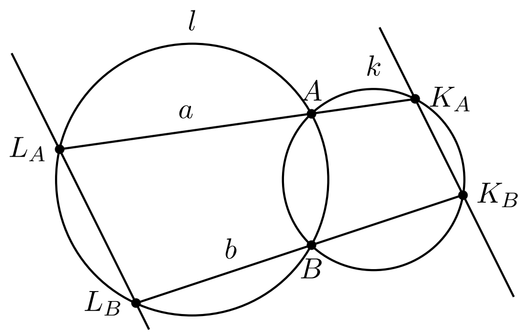
b) a lehető leghosszabb

szelő (tehát az egyenes két körrel való második metszéspontjai közti részét vizsgáljuk, ahogy az 1. ábrán is látható).



6.3.1. ábra.

6.4. Az a illetve a b egyenes áthalad a k, l körök A illetve B metszéspontján és a k, l köröket A-n illetve B-n kívül még a K_A, L_A, illetve a K_B, L_B pontban metszi (lásd az 1. ábrát). Mutassuk meg, hogy a K_AK_B, L_AL_B egyenesek párhuzamosak!

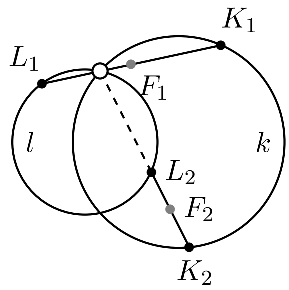


6.4.1. ábra.

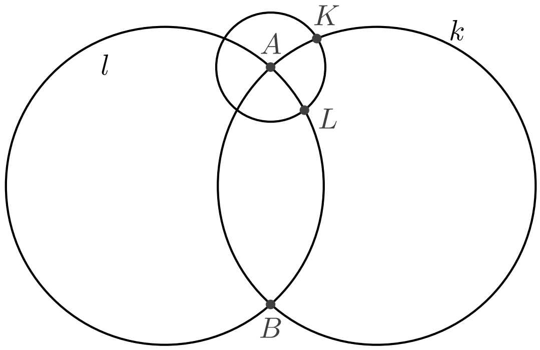
6.5. Adott két metsző kör, k és l. Határozzuk meg az egyik metszésponton át húzott egyenes k-t még K-ban, l-t még L-ben metszi. Határozzuk meg a KL szakasz F felezőpontjának (lásd az 1. ábrát) mértani helyét!

6.6. [23] Szerkesszünk kört két egyenlő sugarú kör egyik metszéspontja körül. Igazoljuk, hogy ennek a két körrel való K, L metszéspontja (lásd az 1. ábrát) az eredeti körök B metszéspontjával egy egyenesen van!

6.7. (M) [19] * *A 2003. évi II. Olimpiai Válogatóverseny 2. feladata*



6.5.1. ábra.



6.6.1. ábra.

A k, l körök metszéspontjai A és B. Választunk k-n két pontot, legyenek ezek K_1 és K_2 (K_1, K_2, A és B négy különböző pont). A K_1A, K_2A egyenesek l-lel való, A-tól különböző metszépontjai legyenek L_1 és L_2. Legyen M a K_1K_2 és L_1L_2 egyenesek metszéspontja.

Igazoljuk, hogy K_1 és K_2 különböző választásainál a K_1L_1M háromszög körülírt körének középpontja mindig egy rögzített körön lesz.

Lásd még a 6.10.–6.11., 6.12.–6.13. feladatokat. A téma egy magasabb szinten újraindul a 12. fejezetben a 12.1., 12.1. feladatoktól.

6.3. Az ív felezőpontja

6.1. (M) Az ABC háromszögbe írható kör középpontja I, a BC oldalához írható kör középpontja I_A. Bizonyítsuk be, hogy $BICI_A$ húrnégyszög.

6.2. (M) Igazoljuk, hogy az ABC háromszög CAB szögének belső szögfelezője felezi a körülírt kör A-t nem tartalmazó $\widehat{BC}$ ívét!

6.3. (M) Mutassuk meg, hogy a háromszög bármelyik szögének szögfelezője és az azzal a szöggel szemközti oldal felezőmerőlegese a háromszög körülírt körén metszi egymást!

6.4. (M) Szerkesztendő háromszög, ha adott két csúcsa, valamint a körülírt és a beírt kör középpontja.

6.5. (MS) Mutassuk meg, hogy az ABC háromszög beírt körének I középpontján, a BC oldalhoz hozzáírt kör I_A középpontján valamint a B, C csúcsokon átmenő kör (lásd a 6.1. feladatot) középpontja az ABC háromszög k körülírt körén van!

6.6. (M) Adottak a k körön az A és a B pontok. Határozzuk meg a k-ba írt $ABCD$ trapéz átlói metszéspontjainak halmazát, ha C és D változik.

6.7. (M) Adott az ABC háromszög k körülírt köre és rajta a B és a C csúcs. Határozzuk meg a háromszögbe írható kör középpontjának mértani helyét!

6.8. (M) Messe az ABC háromszög A-ból induló belső szögfelezője a szemközti oldalt az N_A pontban, a köré írt kört H_A-ban. Bizonyítandó, hogy $H_AN_A \cdot H_AA = H_AB^2$.

6.9. (MS) Jelölje az ABC háromszög beírt körének középpontját I, az A-hoz tartozó belső szögfelező és a háromszög körülírt körének A-tól különböző metszéspontját H_A és legyen $AI =$ $= p_a$, $BI = p_b$, $CI = p_c$, $IH_A = d_a$.

a) Fejezzük ki a $\frac{p_a}{d_a}$ hányadost a háromszög oldalainak segítségével!

b) Fejezzük ki a p_ad_a szorzat értékét a háromszög beírt és körülírt köre sugarának (r, R) segítségével!

c) Adjuk meg a p_bp_c szorzat értékét az ABC háromszög beírt körének sugara és a d_a szakasz segítségével!

6.10. (M) Adott az ABC háromszög A csúcsa, az A-ból induló belső szögfelező és az ABC háromszög köré írt kör második metszéspontja, H_A, továbbá e szögfelező és a BC oldal metszéspontja, N_A. Adott továbbá az ABC háromszögbe írható kör sugarának hossza. Szerkesztendő az ABC háromszög.

6.11. (M) Igaz-e, hogy bármely háromszög bármelyik – nem egyenlő hosszú oldalak közti – csúcsánál

a) a szögfelező a magasságvonal és a körülírt kör középpontjához húzott sugár közé esik?

b) a szögfelező a magasságvonal és a súlyvonal közé esik?

c) a súlyvonal a szögfelező és a körülírt kör középpontjához húzott sugár közé esik?

6.12. (S) Szerkesztendő háromszög, ha adott egyik oldala, a vele szemközti szöge és a beírt kör sugara.

6.13. Szerkesztendő háromszög, ha adott az a három pont, ahol a

a) szögfelezők, **b)** magasságvonalak,

a (csúcsoktól különböző pontban) metszik a körülírt kört.

6.14. (S) Szerkesztendő háromszög, ha adott az egyik csúcsból kiinduló magasság, szögfelező és súlyvonal hossza.

6.15. [18] Adott az ABC háromszög. Adjuk meg a sík összes olyan X pontját, amelyre az ABX háromszög körülírt körének középpontja illeszkedik a CX egyenesre, BCX körülírt körének középpontja AX-re, míg a CAX-é BX-re!

6.16. (M) Szerkesszünk háromszöget, ha ismert az a oldal hossza, a szemközti szög és a szemközti csúcsból induló szögfelező hossza.

6.4. Érintő szárú kerületi szögek

Bemelegítésül ajánljuk a Geometriai feladatok gyűjteménye[23] kötet alábbi példáit: 964., 965., 966., 994., 995.

6.1. (M) Messe az ABC háromszög körülírt körének C-beli érintője az AB egyenest P-ben, míg az $ACB\angle$ belső szögfelező egyenese AB-t Q-ban. Mutassuk meg, hogy $PQ = PC$!

6.2. Az ABC háromszög AB oldalán mozog a P pont. Tekintsük azt a szöget, amelyet a PAC és a PBC háromszög köré írt körhöz a P pontban húzott érint?k bezárnak. Mutassuk meg, hogy ez a szög állandó.

6.3. (M) Legyen az ABC háromszög beírt köre középpontjának merőleges vetülete a BC, CA, AB oldalon rendre X, Y és Z. Fejezzük ki az XYZ háromszög szögeit az ABC háromszög szögeinek ismeretében.

6.4. (MS) [12] Az AD szakasz érinti az ABC háromszög körülírt körét, az AC szakasz pedig az ABD háromszög körülírt körét. Határozzuk meg a $\frac{BD}{BC}$ arány értékét, ha tudjuk, hogy $\frac{AD}{AC} = 3$.

6.5. (M) Az $ABCD$ trapéz átlói merőlegesen metszik egymást a P pontban, melynek tükörképe a trapéz $F_{BC}F_{DA}$ középvonalára P'. Mutassuk meg, hogy az A, B, P' pontokon áthaladó kör érinti a C, D, P' pontokon áthaladó kört.

Lásd még a **??**. feladatot illetve a 16. fejezet 16.1.–16.3. példáit.

6.5. A magasságpont és a körülírt kör

6.1. Mutassuk meg, hogy az ABC háromszög magasságvonalainak T_A, T_B, T_C talppontjai alkotta $T_AT_BT_C$ háromszög szögeit felezik az ABC háromszög magasságvonalai!

6.2. (M) Tükrözzük az ABC háromszög magasságpontját a háromszög

a) oldalaira **b)** oldalfelezőpontjaira!

Mutassuk meg, hogy a kapott pontok illeszkednek az ABC háromszög körülírt körére!

6.3. Tükrözzük az ABC háromszög körülírt körét a háromszög oldalegyeneseire! Tegyünk megfigyelést, fogalmazzunk meg sejtést és bizonyítsuk be!

6.4. Mutassuk meg, hogy ha három azonos sugarú kör egy közös ponton megy át, akkor páronkénti másik metszéspontjuk körülírt köre az eredeti körökkel azonos sugarú!

6.5. (M) *A magasságponton átmenő egyenesek tükörképei*

Mutassuk meg, hogy az ABC háromszög magasságpontján átmenő egyenesnek a háromszög oldalaira vonatkozó tükörképei a háromszög körülírt körén egy pontban metszik egymást.

6.6. (M) *A körülírt kör egy pontjának az oldalakra vonatkozó tükörképei*

Mutassuk meg, hogy a háromszög körülírt köre tetszőleges pontjának a háromszög oldalegyeneseire vonatkozó tükörképei egy egyenesen vannak, amelyre illeszkedik a háromszög magasságpontja is.

6.7. *Simson egyenes*

Mutassuk meg, hogy a sík egy pontjának valamely háromszög oldalaira vonatkozó merőleges vetületei pontosan akkor illeszkednek egy egyenesre, ha a kiindulásul vett pont illeszkedik a háromszög körülírt körére.

Megjegyzés

A vetületi pontok meghatározta egyenest a köri pont Simson egyenesének nevezzük. Előfordul még a „Wallace egyenes” megnevezés is.

6.8. (M) Adott az ABC háromszög és egy tetszőleges Q pont. Jelölje Q tükörképeit az AB, BC, CA oldalegyenesekre vonatkozólag rendre Q_C, Q_A és Q_B, az A, Q_B, Q_C pontokon átmenő kört vagy egyenest k_A, a B, Q_C, Q_A pontokon átmenőt k_B végül a C, Q_A, Q_B pontokat tartalmazót k_C, az ABC háromszög körülírt körét k. Mutassuk meg, hogy a k_A, k_B, k_C, k köröknek van egy P közös pontja, amelynek az ABC háromszög oldalegyeneseire vonatkozó tükörképei Q-val és a háromszög M magasságpontjával egy egyenesen vannak.

6.9. *Egyenes tükörképei*

Adott az ABC háromszög. Mozgassunk egy e egyenest a síkon és képezzük e-nek az AB, BC, CA oldalakra vonatkozó e_C, e_A, e_B tükörképeit. Ha az ABC háromszög nem derékszögű és magasságpontja nem illeszkedik e-re, akkor az e_C, e_A, e_B egyenesek háromszög határolnak, amit a továbbiakban e_Δ-val jelölünk. Ha az ABC háromszög C-nél fekvő szöge derékszög, akkor e_A és e_B párhuzamosak, e_Δ „elfajul”, egyik csúcsa végtelen messze van.

a) Az e_Δ háromszögek egymáshoz mind hasonlóak.

b) Ha az e egyenessel párhuzamos, az ABC háromszög M magasságpontján áthaladó egyenes m és m-nek az oldalakra vonatkozó tükörképei egymást a körülírt kör P pontjában metszik, akkor P az e_Δ háromszög beírt vagy egyik hozzáírt körének középpontja. Ha ABC hegyesszögű, akkor P a beírt, ha $BAC\angle > 90°$, akkor P az e_A oldalhoz hozzáírt kör középpontja.

c) Az e, m egyenesek távolsága megegyezik az e_Δ háromszög beírt (vagy a fentiek szerint a megfelelő hozzáírt) körének sugarával.

c) Az e_Δ háromszög csúcsai a PA, PC, PB egyenesekre illeszkednek.

d) Az e_Δ háromszög területe csak e-nek az M ponttól való távolságától (és az ABC háromszögtől) függ.

6.6. Szélsőérték feladatok

6.1. (M) Szerkesszünk háromszöget, ha ismerjük az c oldal hosszát, a másik két oldal összegét – $(a+b)$-t – és a c-vel szemközti szöget.

6.2. (M) Adott a K kör és egy AB húrja. Hogyan válasszuk meg a C csúcsot, a kör kerületén, hogy a legnagyobb területű ABC háromszöget kapjuk?

6.3. (M) Adott a K kör és egy AB húrja. Hogyan válasszuk meg a C csúcsot, a kör kerületén, hogy a legnagyobb kerületű ABC háromszöget kapjuk?

6.4. (M) Adott körbe írható háromszögek közül melyik területe a legnagyobb?

6.5. (M) Adott körbe írható háromszögek közül melyik területe a legnagyobb?

6.6. (M) Keressük meg a hibát a 6.4M. és a 6.5M. megoldásban!

6.7. (M) A 6.4M. megoldásban lényegében a következő eljárást alkalmaztuk.

1. Ha az ABC háromszögnek van olyan csúcsa, amely nem esik a kör kerületére, akkor a csúcsokat a háromszög egy belső P pontjából – például a súlypontjából – „kitoljuk” a háromszög kerületére, ezzel növeljük a háromszög területét. Ha a háromszög mindhárom csúcsa a körön van, akkor következik a 2. lépés.

2. Ha a háromszög mindhárom oldala egyenlő, akkor az eljárás befejeződött. Ha nem, akkor a 3. lépés következik.

3. Ha a háromszögnek van két nem egyenlő oldala, pl. $AC \neq BC$, akkor a C csúcsot a megfelelő $\widehat{AB}$ ív felező pontjába tolva növeljük a háromszög területét és ismét a 2. lépés következik.

Mutassuk meg, hogy ez az eljárás nem minden ABC háromszögre ér véget.

Megjegyzés. Ez a példa egyben arra is jó példa, hogy az úgynevezett „mohó algoritmus” nem mindig célra vezető. Hiszen itt is arról van szó, hogy minden lépésben „a lehető legjobbat” lépjük, vagyis a lehető legnagyobb területű/kerületű háromszöget állítjuk elő – ám az eljárásunk sosem jut el a legjobbhoz! A 6.9. feladatnál látni fogjuk, hogy ügyesebb eljárással már véges sok lépés után a legjobbhoz jutunk.

De előbb a 6.8. feladatban még tisztázzuk, hogy melyik háromszögeknél vezet célra a mohó algoritmus.

6.8. (M) Adjuk meg az összes olyan háromszöget, amelynek mindhárom csúcsa a körön van, és amelyre a 6.7. feladatban adott eljárás (véges sok lépés után) véget ér.

6.9. (M) Hogyan lehetne kijavítani a 6.7. feladat eljárását úgy, hogy minden, a szabályostól különböző háromszögből véges sok lépésben a terület növelésével a szabályos háromszöghöz jussunk?

6.10. (M) Hogyan lehetne kijavítani a 6.7. feladat eljárását úgy, hogy minden, a szabályostól különböző háromszögből véges sok lépésben a kerület növelésével a szabályos háromszöghöz jussunk?

6.11. (M) Vajon a 6.9. a 6.10. feladat megoldása bizonyítja-e, hogy adott körbe írható háromszögek közül a szabályos háromszög területe és kerülete a legnagyobb?

6.7. Vegyes feladatok

6.1. (MS) Az ABC háromszögben az BN_B, CN_C szögfelezőkön (N_B az AC oldal, N_C a BA oldal megfelelő pontja) a beírt kör I középpontja és az oldalak közti IN_B, IN_C szakaszok hossza egyenlő egymással. Következik-e ebből, hogy az ABC háromszög egyenlő szárú?

6.2. (M) Adottak a síkon az A, B pontok az e egyenes azonos oldalán. Kiválasztjuk az egyenesen azt az M ill. N pontot, melyre $AM + BM$ minimális, illetve $AN = BN$. Bizonyítsuk be, hogy A, B, M, N egy körön fekszenek!

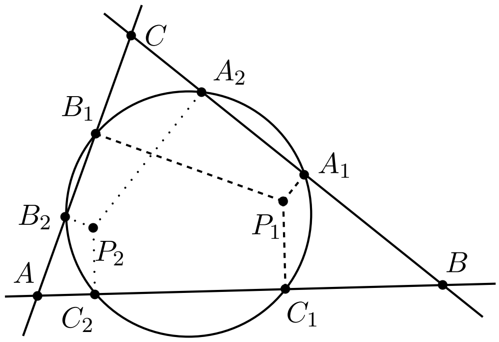
6.3. (S) Az ABC hegyesszögű háromszög B és C csúcsán átmenő kör az AB oldalt másodszor P-ben, az AC oldalt pedig másodszor Q-ban metszi. Bizonyítsuk be, hogy az A csúcsot az APQ háromszög köré írt körének középpontjával összekötő egyenes merőleges BC-re.

6.4. (S) Egy C pontból a k_1 körhöz húzott érintők legyenek CA, CB (A és B az érintési pontok). k_2 kör érinti az AB egyenest B-ben és átmegy C-n. k_1 és k_2 második metszéspontja M. Bizonyítsuk be, hogy az AM egyenes felezi a BC szakaszt!

6.5. (S) Az ABC háromszög beírt köre az AB, BC, CA oldalakat rendre a C_1, A_1, B_1 pontokban érinti. Az ABC háromszög köré írt kör C-t nem tartalmazó $\widehat{AB}$ ívének felezőpontja legyen C_2, az A-t nem tartalmazó $\widehat{BC}$ ív felezőpontja A_2, a B-t nem tartalmazó $\widehat{CA}$ ív felezőpontja pedig B_2. Bizonyítsuk be, hogy az A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 egyenesek egy ponton mennek át!

6.6. (M) Egy háromszög mindhárom oldalegyenesét két pontban metszi el egy kör.

a) Mutassuk meg, hogy ha a három oldalegyenesen választott egy-egy metszéspontban (A_1, B_1, C_1) az adott oldalegyenesre állított merőlegesek egy ponton mennek át (P_1), akkor mindegyik oldalegyenesen a másik metszéspontban (A_2, B_2, C_2) állított merőlegesek is egy ponton (P_2) mennek át (lásd az 1. ábrát)!



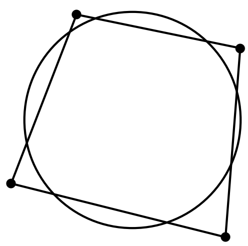
6.6.1. ábra.

Igazoljuk, hogy ebben a szituációban

b) $ABP_1\sphericalangle \equiv P_2BC\sphericalangle$, $\quad BCP_1\sphericalangle \equiv P_2CA\sphericalangle$, $\quad CAP_1\sphericalangle \equiv P_2AB\sphericalangle \pmod{180°}$!

c) $\frac{P_1A_1}{P_1C_1} = \frac{P_2C_2}{P_2A_2}$, $\quad \frac{P_1B_1}{P_1A_1} = \frac{P_2A_2}{P_2B_2}$, $\quad \frac{P_1C_1}{P_1B_1} = \frac{P_2B_2}{P_2C_2}$!

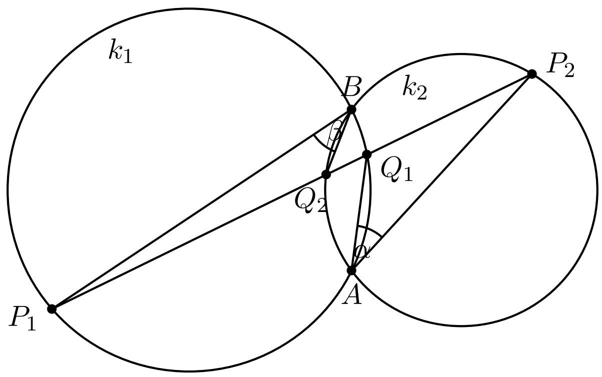
6.7. (S) Egy kör és egy négyszög úgy helyezkedik el a síkon, mint az a 6.7. ábrán látható. Tudjuk, hogy a kör négyszögön belüli két-két szembenfekvő ívének összege egyenlő. Bizonyítsuk be, hogy a négyszög húrnégyszög!



6.7.1. ábra.

6.8. [15] A k_1, k_2 körök az A, B pontokban metszik egymást. Egy egyenes az 1. ábrán látható módon a P_1, Q_2, Q_1, P_2 pontokban metszi a két kört. Mutassuk meg, hogy $P_1BQ_2\angle = P_2AQ_1\angle$!

6.9. Adott az ABC háromszög. Ha P a sík tetszőleges, de az ABC háromszög oldalegyeneseire nem illeszkedő pontja, akkor tekintsük az ABP, BCP, CAP háromszögek k_C, k_A, k_B körülírt



6.8.1. ábra.

köreit és azok O_C, O_A, O_B középpontját. Legyen az $O_AO_BO_C$ háromszög körülírt körének középpontja P'.

A P' pont a háromszög melyik nevezetes pontja, ha P az ABC háromszög

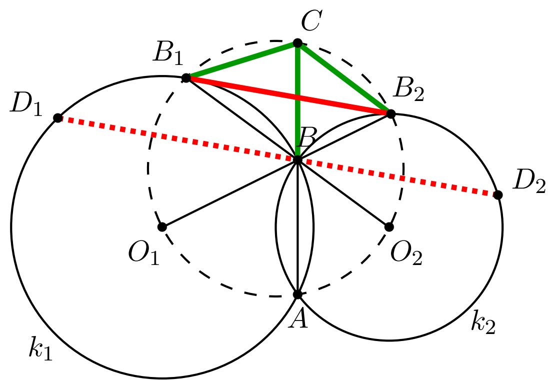
a) magasságpontja; **b)** beírt körének kp-ja?

6.10. (S) [15] Az O_1 illetve O_2 középpontú k_1, k_2 körök az A, B pontokban metszik egymást. Az O_1B egyenes k_2-t még B_2-ben, az O_2B egyenes pedig k_1-et még B_1-ben metszi. Mutassuk meg, hogy (lásd az 1. ábrát)

a) az O_1, O_2, A pontokon át fektetett k körre illeszkedik B_1 és B_2 is!

b) az AB egyenest és a k kör A-tól különböző C metszéspontjára $CB = CB_1 = CB_2$!

c) ha a B-n át B_1B_2-vel párhuzamosan húzott egyenes a k_1, k_2 köröket még a D_1, D_2 pontokban metszi, akkor $D_1D_2 = AB_1 + AB_2$!



6.10.1. ábra.

6.11. (S) [15] A k_2 kör és az O_1 középpontú k_1 kör az A, B pontokban metszik egymást. Legyen C a k_1 kör k_2 körlap belsejében található ívének tetszőleges pontja és jelölje a BC, AC egyenesek k_2 körrel alkotott másik metszéspontját E_B, illetve E_A. Mutassuk meg, hogy az O_1C, E_AE_B egyenesek merőlegesek egymásra!

6.12. (MS)

a) Adott háromszög köré szerkesszünk szabályos háromszöget, tehát az adott háromszög csúcsai illeszkedjenek a szabályos háromszög oldalegyeneseire (megengedjük, hogy ne magára az oldalra essen a csúcs, hanem az oldal meghosszabbítására)!

b) Melyik a legnagyobb ilyen szabályos háromszög?

6.13. (S) Adott háromszög köré szerkesszünk egy másik adott háromszöghöz hasonló háromszöget!

6.14. (S) Szerkesztendő négyszög, ha adott két átlója, az átlók szöge és két egymás melletti szöge.

6.15. (S) Szerkesztendő négyszög, ha adott két átlója, az átlók szöge és két szemközti szöge.

6.16. (S) Adott egy szög, melynek csúcsa az O pont, szárai a b, c félegyenesek és M tetszőleges pont a szög szögfelezőjén. Két kört is rajzolunk, amelyek az O és az M ponton is átmennek. Az első kör a szög szárait a B_1 és C_1 pontokban, a második kör pedig a B_2, C_2 pontokban metszi. Bizonyítsuk be, hogy $B_1B_2 = C_1C_2$!

7. FEJEZET

A terület

7.1. Beírt kör, hozzáírt körök

7.1. (MS) Mutassuk meg, hogy a háromszögbe írt kör r sugarára, a háromszög s félkerületére („semiperimeter"), valamint a háromszög T területére teljesül az $s \cdot r = T$ összefüggés!

7.2. (MS) Keressünk a 7.1. feladatéhoz hasonló formulát, amely a háromszög területét a háromszög oldalaival és a háromszöghöz hozzáírt, az a oldalt kívülről érintő kör r_a sugarával hozza összefüggésbe!

7.3. (M) Jelölje az ABC háromszög beírt, illetve a BC oldalhoz hozzáírt körének középpontját I, illetve I_a, sugaraikat r, illetve r_a, az AB oldalegyenesen található érintési pontjukat U, illetve U_a.

a) Mutassuk meg, hogy az IUB, BU_aI_a háromszögek hasonlóak!

b) fejezzük ki az ABC háromszög területét az s, $s-a$, $s-b$, $s-c$ mennyiségek segítségével!

7.4. (MS) Mutassuk meg, hogy a háromszög m_a, m_b, m_c magasságaira és a beírt kör r sugarára

$$\frac{1}{m_a}+\frac{1}{m_b}+\frac{1}{m_c}=\frac{1}{r}.$$

7.5. (M) Fejezzük ki a háromszög hozzáírt, az a oldalt kívülről érintő kör r_a sugarának hosszát a háromszög m_a, m_b, m_c magasságainak függvényeként!

7.2. Ceva szakaszok

7.1. Adott háromszög egyik csúcsa és a szemközti oldal valamely pontja közti szakaszt a háromszög *Ceva-szakasz*ának nevezzük. Sok feladat szól három olyan Ceva-szakaszról, amelyek három különböző csúcsból indulnak. Most csak egyet vizsgálunk.

Mutassuk meg, hogy a háromszög Ceva-szakasza ugyanolyan arányban osztja fel azt az oldalt, amelyen a háromszög csúcsától különböző végpontja van, mint a háromszög területét!

7.2. (S) Jelölje az ABC háromszög AC oldalának A felőli harmadolópontját B_1, míg a BC oldal felezőpontját A_1, az AA_1, BB_1 szakaszok metszéspontját P, a CP egyenes és az AB oldal metszéspontját C_1.

a) Szerkesszük meg az ábrát dinamikus geometriai szoftverrel!

b) Sejtsük meg az alábbi arányok értékét!

$\frac{T_{BA_1P}}{T_{ABC}}$ $\frac{T_{A_1CP}}{T_{ABC}}$ $\frac{T_{CB_1P}}{T_{ABC}}$ $\frac{T_{B_1AP}}{T_{ABC}}$ $\frac{T_{AC_1P}}{T_{ABC}}$ $\frac{T_{C_1BP}}{T_{ABC}}$

$\frac{BP}{PB_1}$ $\frac{AP}{PA_1}$ $\frac{CP}{PC_1}$ $\frac{AC_1}{C_1B}$

c) Bizonyítsuk be a sejtéseket!

7.3. (S) Jelölje az ABC háromszög AC oldalának A felőli harmadolópontját B_1, míg a BC oldal C felőli harmadolópontját A_1, az AA_1, BB_1 szakaszok metszéspontját P, a CP egyenes és az AB oldal metszéspontját C_1.

a) Szerkesszük meg az ábrát dinamikus geometriai szoftverrel!

b) Sejtsük meg az alábbi arányok értékét!

$\frac{T_{BA_1P}}{T_{ABC}}$ $\frac{T_{A_1CP}}{T_{ABC}}$ $\frac{T_{CB_1P}}{T_{ABC}}$ $\frac{T_{B_1AP}}{T_{ABC}}$ $\frac{T_{AC_1P}}{T_{ABC}}$

$\frac{T_{C_1BP}}{T_{ABC}}$

$\frac{BP}{PB_1}$ $\frac{AP}{PA_1}$ $\frac{CP}{PC_1}$ $\frac{AC_1}{C_1B}$

c) Bizonyítsuk be a sejtéseket!

7.4. (M) Az ABC háromszög AB, BC, CA oldalain a C_1, A_1, B_1 pontok úgy helyezkednek el, hogy az AA_1, BB_1, CC_1 szakaszok egy közös P ponton haladnak át.

Mutassuk meg, hogy
$$\frac{T_{APC}}{T_{BPC}} = \frac{AC_1}{C_1B}.$$

7.5. (S) **Ceva tétele**

Igazoljuk, hogy az ABC háromszög AB, BC, CA oldalain adott C_1, A_1, B_1 pontokra az AA_1, BB_1, CC_1 szakaszok pontosan akkor mennek át egy közös ponton, ha
$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

7.6. (S) Igazoljuk a Ceva-tétel gyakorlásaként, hogy a háromszög súlyvonalai egy ponton mennek át!

7.7. (S) „Ellenőrizzük” Ceva-tételét a (belső) szögfelezőkre!

7.8. „Ellenőrizzük” Ceva-tételét (7.5. feladat) hegyesszögű háromszögben a magasságvonalakra!

7.9. (S) Kössük össze az ABC háromszög minden csúcsát azzal a ponttal, ahol a beírt kör érinti a szemközti oldalt. Bizonyítsuk be, hogy az így kapott szakaszok egy ponton mennek át.

Megjegyzés. Ezt a pontot a háromszög *Gergonne-pontjának* nevezik.

7.10. (S) Kössük össze az ABC háromszög minden csúcsát azzal a ponttal, ahol a szemközti oldalhoz írt kör érinti a szemközti oldalt. Bizonyítsuk be, hogy az így kapott szakaszok egy ponton mennek át.

Megjegyzés. Ezt a pontot a háromszög *Nagel-pontjának* nevezik.

7.11. (S) Az ABC háromszög AB, BC, CA oldalain adott C_1, A_1, B_1 pontokról tudjuk, hogy az AA_1, BB_1, CC_1 szakaszok egy közös ponton mennek át. Tükrözzük e három pontot a megfelelő oldal felezőpontjára. Igazoljuk, hogy az így kapott C_2, A_2, B_2 pontokra is igaz, hogy az AA_1, BB_1, CC_1 szakaszok egy közös ponton mennek át.

7.12. (M) **Ceva tétele, trigonometrikus alak**

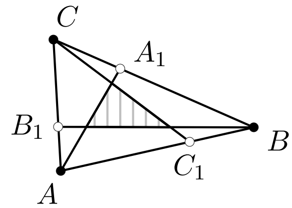
Igazoljuk, hogy az ABC háromszög AB, BC, CA oldalain adott C_1, A_1, B_1 pontokra az AA_1, BB_1, CC_1 szakaszok pontosan akkor mennek át egy közös ponton, ha
$$\frac{\sin ACC_1\sphericalangle}{\sin C_1CB\sphericalangle} \cdot \frac{\sin BAA_1\sphericalangle}{\sin A_1AB\sphericalangle} \cdot \frac{\sin CBB_1\sphericalangle}{\sin B_1BA\sphericalangle} = 1.$$

7.13. (S) Igazoljuk Ceva tétele (7.5. feladat) segítségével, hogy a háromszög három szimediánja egy ponton megy keresztül.

7.14. (S) Igazoljuk Ceva tétele (7.5. feladat) segítségével, hogy a háromszög három szimediánja egy ponton megy keresztül.

7.15. (S) Jelölje az ABC háromszög AC oldalának A felőli harmadolópontját B_1, a CB oldal C felőli harmadolópontját A_1, míg a BA oldal B felőli harmadolópontját C_1 (lásd az 1. ábrát).

Hogyan aránylik az ABC háromszög területéhez az AA_1, BB_1, CC_1 Ceva szakaszok által határolt háromszög területe?



7.15.1. ábra.

7.16. Adott az ABC háromszög és AB, BC, CA oldalegyenesén a C_1, az A_1 illetve a B_1 pont. Legyen

$$\frac{AC_1}{C_1B} = \lambda_c, \qquad \frac{BA_1}{A_1C} = \lambda_a, \qquad \frac{CB_1}{B_1A} = \lambda_b,$$

ahol ezek az arányok előjelesen értendők, tehát pl ha az $\overrightarrow{AC_1}$, $\overrightarrow{C_1B}$ vektorok azonos irányúak – azaz C_1 az AB szakaszon belül van –, akkor λ_c pozitív, ha pedig ellenkező irányúak – tehát C_1 az AB egyenesen az AB szakaszon kívül van –, akkor λ_c negatív.

Írjuk fel az $A_1B_1C_1$, ABC háromszögek területének arányát a λ_a, λ_b, λ_c mennyiségek függvényeként!

7.17. Menelaosz-tétel

Igazoljuk, hogy az ABC háromszög AB, BC, CA oldalain adott C_1, A_1, B_1 pontok akkor és csakis akkor illeszkednek egy egyenesre, ha – előjeles arányokkal számolva –

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = -1.$$

8. FEJEZET

Középpontos nagyítás

A G.I. kötet G.I.8. fejezetében már találkoztunk a témával. Érdemes feleleveníteni az ottani feladatokat, állításokat.

8.1. Bemelegítő feladatok

8.1. Kísérletezzünk dinamikus geometriai szoftverrel!

Adott egy szög, szárai a, b, csúcsa C. Adott még egy c egyenes is. Mozgassunk egy c-vel párhuzamos egyenest, messe ez a szögszárakat az A, B pontokban. Vizsgáljuk az ABC háromszög

a) AB oldala F_c felezőpontjának

b) súlypontjának

mértani helyét!

8.2. Kísérletezzünk dinamikus geometriai szoftverrel!

Vegyük fel az $ABCD$ négyszöget és a sík egy P pontját. Vizsgáljuk az ABP, BCP, CDP, DAP háromszögek S_{ABP}, S_{BCP}, S_{CDP}, S_{DAP} súlypontjai által alkotott $S_{ABP}S_{BCP}S_{CDP}S_{DAP}$ négyszöget! Tegyünk megfigyelést, fogalmazzunk meg sejtést, próbáljuk meg igazolni!

8.3. Dinamikus geometriai szoftverrel vizsgáljuk egy adott háromszögbe írható téglalapok rendszerét!

Definíció. A $PQRS$ négyszöget az ABC háromszög AB oldala fölé írt négyszögnek nevezzük, ha két csúcsa az AB oldalon van, másik két csúcsa a másik két oldalon van.

8.4. (M) Az O_1, O_2 középpontú k_1, k_2 körök a T pontban érintik egymást. Egy T-n átmenő egyenes még az A_1, A_2 pontban metszi k_1-et ill. k_2-t. Mutassuk meg, hogy az A_1O_1, A_2O_2 egyenesek párhuzamosak!

8.2. Szerkesztések

8.1. [23] Egy szög tartományán kívül kitűzött ponton át szerkesszünk olyan egyenest, amelynek a közelebbi szárig terjedő darabja egyenlő a szárak közti darabjával!

8.2. (MS) [23] Szerkesszünk két koncentrikus kört metsző egyenest, amelynek a két kör közé eső darabjai egyenlők a kisebbik körbe eső darabjával!

Lásd még a Geometriai feladatok gyűjteménye I. kötetének[23] 1322.–1375. feladatait.

8.3. Szakaszok

8.1. Adott két egymással párhuzamos szakasz. Szerkesszük meg az összes olyan pontot, amelyből egymásba nagyíthatók!

8.2. (S) Adott egy trapéz. Szerkesszük meg

– átlóinak metszéspontját,

– szárai meghosszabításának metszéspontját,

– alapjainak felezőpontjait!

Tegyünk megfigyelést, fogalmazzunk meg sejtést, próbáljuk meg igazolni!

8.3. (S) Adott egy szakasz és a felezőpontja. Adott még egy pont is, amely nem illeszkedik a szakasz egyenesére. Szerkesszünk a legutóbb adott ponton át az adott szakasszal párhuzamos egyenest, ha a szerkesztéshez csak egyélű vonalzót használhatunk, körző alkalmazása nem engedélyezett.

8.4. (S) Adott egy szakasz és egy vele párhuzamos egyenes. Szerkesszük meg a szakasz felezőpontját, ha a szerkesztéshez csak egyélű vonalzót használhatunk, körző alkalmazása nem engedélyezett.

8.5. (M) Az $ABCD$ trapéz AB alapja 7, CD alapja 17 cm hosszú.
a) Határozzuk meg a trapéz középvonalának (a szárak felezőpontját összekötő szakasz) hosszát!
b) Jelölje az AD szár A felőli harmadolópontját G_A, a BC szár B felőli harmadolópontját G_B. Határozzuk meg a G_AG_B szakasz hosszát!
c) Határozzuk meg az átlók metszéspontján át az alapokkal párhuzamosan húzott egyenes szárak közés eső rarabjának hosszát!
d) Fejezzük ki az alapok hosszának függvényeként a trapéz középvonalának hosszát és a szárak egyik alap felőli harmadolópontjait összekötő szakasz hosszát!
e) Fejezzük ki a c) feladatban említett szakasz hosszát is az alapokkal!

Lásd még a Geometriai feladatok gyűjteménye I. kötetének[23] 1269.–1272. feladatait.

8.4. Háromszögek

8.1. Adott az ABC háromszög. Egy AC-vel párhuzamos egyenes az AB oldalt P-ben, az AF_A súlyvonalat T-ben, a BC oldalt K-ban metszi. Határozzuk meg az AC oldal hosszát, ha tudjuk, hogy $PT = 3$, $TK = 5$.

8.2. (MS) Mi a mértani helye az ABC háromszög AB oldala fölé írt téglalapok (lásd a 8.3. feladatot) középpontjainak?

8.3. (M) [1] Adottak a síkon a k, l körök. Szerkesztendő
a) háromszög,
b) négyszög,
amelynek csúcsai k-n, oldalfelezőpontjai pedig l-en vannak.

Lásd még a Geometriai feladatok gyűjteménye I. kötetének[23] 1376.–1379. feladatait.

8.5. Körök és egyenesek

8.1. (MS) Az ABC háromszög beírt körét az AB egyenes E-ben, az AB-vel párhuzamos másik érintője D-ben értinti. A CD, AB egyenesek metszéspontja F. Mutassuk meg, hogy $AE = FB$!

8.2. (S) Az ABC háromszög beírt köre az AB, BC, CA oldalakat rendre a C_1, A_1, B_1 pontokban érinti. Az ABC háromszög köré írt kör C-t nem tartalmazó $\widehat{AB}$ ívének felezőpontja legyen C_2, az A-t nem tartalmazó $\widehat{BC}$ ív felezőpontja A_2, a B-t nem tartalmazó $\widehat{CA}$ ív felezőpontja pedig B_2. Bizonyítsuk be, hogy az A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 egyenesek egy ponton mennek át!

Lásd még a Geometriai feladatok gyűjteménye I. kötetének[23] 1380.–1386. feladatait.

8.6. Érintkező körök

8.1. (M) Adott két egymást érintő kör. Mutassuk meg, hogy az érintési pontjuk egy olyan középpontos nagyítás centruma, amely az egyik kört a másikba képezi!

8.2. (M) Adott egy k kör és rajta egy H pont. Mutassuk meg, hogy ha k' a k kör képe egy H centrumú középpontos nagyításnál, akkor k és k' érintik egymást H-ban!

8.3. (MS) A k_1, k_2 körök az e egyenest az A_1 illetve A_2 pontban, egymást pedig az ezektől különböző C pontban érintik. A k_2 kör e-vel párhuzamos másik érintője k_2-t B-ben érinti. Bizonyítsuk be, hogy C illeszkedik az A_1B egyenesre!

8.4. (MS) Adott az egymással párhuzamos e és f egyenes valamint e-n az E, f-en az F pont. Mi azon M pontok mértani helye a síkban, amelyekhez van olyan k_E és k_F kör, amelyek egymást M-ben érintik és k_E az E-pontban érinti e-t, míg k_F az F-ben f-et?

8.5. (MS) A k_1 kör a k_2 kör belsejében helyezkedik el és az A pontban érinti azt. A k_1 kör A-tól különböző T pontjában állított érintője a k_2 kört a B, C pontokban metszi. Mutassuk meg, hogy az AT egyenes felezi a BAC szöget!

8.6. (M) A k, l körök egymást a P pontban kívülről érintik. Egy P-n átmenő egyenes a k, l köröket P-n kívül még az L, K pontokban metszi. A k-tól különböző k_1 kör is átmegy a P, K pontokon és az L-ből k_1-hez húzott t érintő érintési pontja T, míg t és az l kör L-től különböző metszéspontja U. Mutassuk meg, hogy ha a KT egyenes és a k kör K-tól különböző metszéspontja V, akkor az UV egyenes érinti k-t.

8.7. A k, l körök egymást a P pontban kívülről érintik. Egy P-n átmenő egyenes a k, l köröket P-n kívül még az L, K pontokban metszi. A k körön adott még a V pont is. A k kör V-beli v érintőjének az l körrel való egyik metszéspontja U, míg az LU, KV egyenesek metszéspontja T. Mutassuk meg, hogy a PKT háromszög körülírt köre érinti az UL egyenest.

8.7. A térben

8.1. Egy kúp alakú edényben az edény térfogatának fele mennyiségű folyadék van. Milyen magasan van a folyadék felszíne, ha a kúp

a) felfelé szűkül?

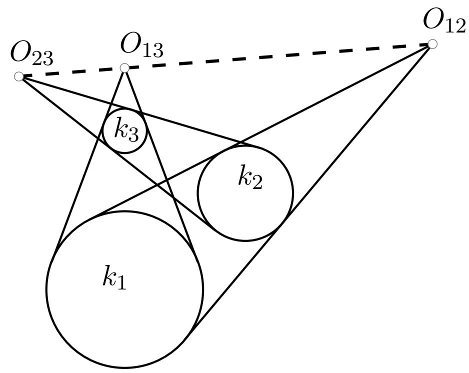
b) lefelé szűkül?

8.2. Adott az $ABCDEFGH$ kocka (az $ABCD$, $EFGH$ párhuzamos négyzetlapok és a rájuk merőleges élek: AE, BF, CG és DH). Felveszünk egy szakaszt, melynek egyik végpontja az AB, másik végpontja az FG élen van. Határozzuk meg az így adódó szakaszok felezőpontjának mértani helyét!

8.8. Középpontos nagyítások kompozíciója

8.1. (S) Határozzuk meg az O_1 középpontú λ_1 arányú és az O_2 középpontú λ_2 arányú középpontos nagyítás kompozícióját!

8.2. (MS) Adott három kör. Igazoljuk, hogy páronkénti külső hasonlósági pontjaik egy egyenesen vannak.



8.2.1. ábra.

8.3. (M) Adott három kör. Tekintsük közülük két párnak a belső hasonlósági pontját, a harmadik párnak pedig a külső hasonlósági pontját! Mutassuk meg, hogy ez a három hasonlósági ponht egy egyenesen van!

8.4. Adott az ABC háromszög és az AB oldalegyenesen a C_1, a BC oldalegyenesen az A_1 pont. Értelmezzük a

$$\frac{C_1B}{C_1A} = \lambda_C; \qquad \frac{A_1C}{A_1B} = \lambda_A \tag{1}$$

törteket előjelesen, tehát pl λ_C értéke negatív, ha C_1 az AB szakaszon belsejében van, míg negatív ha nincs a szakaszon, sem a végpontjaiban. A C_1 középpontú λ_C arányú $C_1^{\lambda_C}$ középpontos nagyítás az A_1 pontot B_1-be képezi, míg az A_1 középpontú λ_A arányú $A_1^{\lambda_A}$ középpontos nagyítás a B_1 pontot C_1-be viszi.

a) Mutassuk meg, hogy van egy olyan B_1 ponta síkon és hozzá egy λ_B arány, hogy a B_1 középpontú λ_B arányú $B_1^{\lambda_B}$ középpontos nagyítással a három említett középpontos nagyítás

$$B_1^{\lambda_B} \circ A_1^{\lambda_A} \circ C_1^{\lambda_C} \tag{2}$$

kompozíciója az identitás!

b) Hol található a B_1 pont?

c) Határozzuk meg λ_B értékét!

8.5. *Menelaosz tétele*

Adottak az ABC háromszög AB, BC, CA oldalegyenesein a C_1, A_1, B_1 pontok. Mutassuk meg, hogy C_1, A_1 és B_1 pontosan akkor illeszkedik egy egyenesre, ha az AB, BC, CA egyeneseken előjeles távolságokkal számolva

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = -1. \tag{1}$$

8.6. (S) Adottak a K, L körök a síkon. Tekintsük az összes olyan m kört, amely K-t és L is érinti és kössük össze egyenessel K és m érintési pontját L és m érintési pontjával. Mutassuk meg, hogy van két pont a síkon, hogy az így adódó egyenesek mindegyike legalább az egyiken átmegy.

8.7. (S) A k_A, k_B, k_C körök az ABC háromszög belsejében és egymás külsejében helyezkednek el úgy, hogy k_A érinti az AB, AC oldalegyeneseket, k_B a BC, BA oldalegyeneseket, míg k_C a CA, CB oldalegyeneseket. A k kör kívülről érinti mind a három kört, k_A-t T_A-ban k_B-t T_B-ben k_C-t T_C-ben. Mutassuk meg, hogy az AT_A, BT_B, CT_C egyenesek egy ponton mennek át!

8.8. (S) Az ABC háromszög ω körülírt körének belsejében helyezkednek el a c_A, c_B és c_C körök úgy, hogy ω-t rendre az U_A, U_B, U_C pontokban érintik, ezen kívül c_A az AB, AC egyeneseket, c_B a BC, BA egyeneseket, míg c_C a CA, CB egyeneseket is érinti. Mutassuk meg, hogy az AU_A, BU_B, CU_C egyenesek egy közös ponton haladnak át!

8.9. Vegyes feladatok

8.1. (M) [17] A k_1, k_2, k_3 körök egymást páronként érintik három különböző pontban. Mutassuk meg, hogy k_1 és k_2 érintési pontját a másik két érintési ponttal összekötő egyenesek k_3-at egy átmérő két végpontjában metszik.

8.2. (M) A k, l körök egymást a P pontban kívülről érintik. A P-n átmenő p egyenes a k, l köröket P-n kívül még az L, K pontokban metszi. A k körön adott még a V pont is. A k kör V-beli v érintőjének az l körrel való egyik metszéspontja U, míg az LU, KV egyenesek metszéspontja T.

a) Határozzuk meg a T pont mértani helyét, ha V befutja k-t (l, k, P, p rögzített, v és l mindkét metszéspontja figyelembe veendő).

b) Határozzuk meg a T pont mértani helyét, ha p forog P körül (l, k, P, V, v, U rögzített).

8.3. (M) *IMO, 2008 Madrid, 6. fel.*

Legyen $ABCD$ konvex négyszög, amelyben $|BA| \neq |BC|$. Jelölje ω_1 illetve ω_2 az ABC illetve ADC háromszög beírt körét. Tegyük fel, hogy létezik egy olyan ω kör, amely érinti az BA félegyenes A-n túli részét és a BC félegyenes C-n túli részét, továbbá érinti az AD és CD egyeneseket. Bizonyítsuk be, hogy az ω_1, ω_2 körök közös külső érintői az ω körön metszik egymást.

9. FEJEZET

Egyenlőtlenségek

A geometriai egyenlőtlenségek előtt érdemes megismerkedni az Algebra II. kötet Egyenlőtlenségek fejezetének (A.II.2) feladataival.

Ebbe a témakörbe tartozó feladatok még a Geometria II. kötetben: 3.1.–3.5., 6.1.–6.11.

9.1. Bevezető feladatok

9.1. Igazoljuk, hogy egy háromszögben két oldal négyzetösszege attól függően nagyobb a harmadik oldal négyzeténél, egyenlő vele, vagy kisebb annál, hogy a két oldal által közrezárt szög hegyes-, derék- vagy tompaszög.

9.2. (M) Adott a síkon két pont, A és B, valamint egy, az AB egyenessel párhuzamos e egyenes. A P pont az e egyenesen fut. Melyik helyzetben lesz az $APB\angle$ szög a legnagyobb?

9.2. Háromszögegyenlőtlenség és súlyvonalak

9.1. (M) Bizonyítsuk be, hogy a háromszög súlyvonalainak összege kisebb a kerület másfélszeresénél!

9.2. (M) Bizonyítsuk be, hogy a háromszög súlyvonalainak összege nagyobb a kerület felénél!

9.3. (MS) Tükrözzük az ABC háromszög S súlypontját a három oldalfelező pontra. Így sorban az S_A, S_B, S_C pontokat kapjuk (Értelemszerűen S_A a BC oldalra vett tükörkép stb.)

Igazoljuk, hogy az S_ASB, S_ASC, S_BSA, S_BSC, S_CSA és S_CSB háromszögek egybevágók, oldalaik hossza az ABC háromszög súlyvonalai hosszának kétharmada, súlyvonalainak hossza pedig egyenlő az ABC háromszög oldalhosszainak felével.

9.4. (M) Bizonyítsuk be, hogy a háromszög súlyvonalainak összege kisebb a kerületnél és nagyobb a háromszög kerületének háromnegyedénél!

9.5. (M) Van-e olyan egynél kisebb konstans, amelyre igaz, hogy a háromszög súlyvonalai *minden* háromszögben kisebbek a kerület c-szeresénél?

9.3. A háromszög kerülete és területe

9.1. (MS) Adottak az a, b, c pozitív szakaszhosszak. Igazoljuk, hogy pontosan akkor szerkeszthető olyan háromszög, amelynek ezek az oldalhosszai, ha teljesül az alábbi egyenlőtlenség:

$2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 > a^4 + b^4 + c^4$.

9.2. (MS) Az a, b, c pozitív számokra teljesül az alábbi egyenlőtlenség:

$2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 > a^4 + b^4 + c^4$.

Igazoljuk, hogy akkor teljesül rájuk az alábbi egyenlőtlenség is:

$2ab + 2ac + 2bc > a^2 + b^2 + c^2$.

9.3. (MS) Bizonyítsuk be, hogy az a, b, c oldalhosszúságú háromszögekre igaz, hogy $8(s-a)(s-b)(s-c) \leq abc$, ahol s a háromszög félkerületét jelöli.

9.4. (M) Bizonyítsuk be, hogy $T \leq s^2/3\sqrt{3}$, ahol T a háromszög területét, s a háromszög félkerületét jelöli.

Milyen háromszögekre áll fenn egyenlőség?

9.5. (M) Adott területű háromszögek közül melyik háromszög kerülete a legkisebb?

9.6. (S) Adott kerületű háromszögek közül melyik háromszög területe a legnagyobb?

9.4. A háromszög beírt köre

9.1. (S) Igazoljuk, hogy minden háromszögben $r \leq s/\sqrt{27}$. Itt s a háromszög félkerületét, r a beírt körének sugarát jelöli.

Milyen háromszögekben van egyenlőség?

9.2. (S) Adott kerületű háromszögek közül melyikben legnagyobb a beírt kör sugara?

9.3. (S) Adott kör köré írt háromszögek közül melyik kerülete a legkisebb?

9.5. Speciális adatok a háromszögben

9.1. (M) Igazoljuk, hogy az ABC háromszögben az A-hoz tartozó súlyvonal hossza legfeljebb $R+d_1$, ahol R a köréírt kör sugara, d_1 a köréírt kör középpontjának távolsága a BC oldaltól.

Mikor áll fenn egyenlőség?

9.2. (M) * Az ABC háromszögben A-nál nem tompaszög van. Igazoljuk, hogy az A-ból induló súlyvonal legfeljebb akkora, mint a b és c oldalhoz írt kör sugarainak átlaga.

Igazoljuk, hogy hegyes- és derékszögű háromszögben a három súlyvonal hosszának összege legfeljebb akkora, mint a három hozzáírt kör sugarának összege.

Mikor áll fenn egyenlőség?

9.3. (M) * Igazoljuk, hogy hegyes- és derékszögű háromszögben a három súlyvonal hosszának összege legfeljebb $4R+r$, ahol R a köréírt kör sugara, r a beírt kör sugara. Egyenlőség szabályos háromszögnél van.

9.4. (M) *Sugáregyenlőtlenség*

Bizonyítsuk be, hogy a háromszög beírt körének sugara nem nagyobb a köréírt kör sugarának felénél.

Milyen háromszögekben áll fenn egyenlőség?

9.6. Négyzetösszegek

9.1. (M) Adott a síkon két pont, A és B, valamint egy, az AB egyenessel párhuzamos e egyenes. A P pont az e egyenesen fut. Melyik helyzetben lesz az A és B pontoktól vett távolságának négyzetösszege minimális?

9.2. (M) Adott a sík két pontja, A és B, valamint egy e egyenes, amely nem azonos az AB egyenessel. Szerkesszük meg az e egyenesnek azt a P pontját, amelyre az AP^2+BP^2 összeg minimális.

9.3. (M) Adott a síkon két pont, A és B, valamint egy, az AB egyenessel párhuzamos e egyenes. A P pont az e egyenesen fut. Melyik helyzetben lesz az A és B pontoktól vett távolságának szorzata minimális?

9.4. (M) Jelölje R a háromszög köréírt körének sugarát. Igazoljuk, hogy a háromszög oldalainak négyzetösszege kisebb $8R^2$-nél, ha a háromszög tompaszögű és egyenlő vele, ha a háromszög derékszögű.

Megjegyzés. Az is igaz, hogy a háromszög pontosan akkor hegyesszögű, ha az oldalak négyzetösszege nagyobb $8R^2$-nél, de ennek bizonyításához erősebb eszközre van szükség, l. a 17.31. feladatot.

9.5. (M) Igazoljuk, hogy minden háromszögben

$a^2 + b^2 + c^2 \leq 9R^2$,

ahol a, b és c a háromszög oldalainak hossza, R a köréírt kör sugara.

Az egyenlőség akkor és csakis akkor áll fenn, ha a háromszög szabályos.

9.7. Konvexitás

9.1. (M) Bizonyítsuk be, hogy ha a PQR háromszög csúcsai az ABC háromszög belsejében vagy határán vannak, és a PQR háromszög nem azonos az ABC háromszöggel, akkor az utóbbi kerülete nagyobb az előbbiénél.

9.2. (M) Bizonyítsuk be, hogy ha a K konvex sokszög pontjai egy L sokszög belsejében, vagy határán vannak, akkor a K sokszög kerülete legfeljebb akkora, mint az L sokszögé és egyenlő csak akkor lehet vele, ha $K = L$.

9.8. Vegyes feladatok

9.1. (M) [21] Az ABC háromszög AB, BC, CA oldalának egy-egy negyedelőpontja a C_1, az A_1, illetve a B_1 pont:

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} = \frac{|BA_1|}{|A_1C|} = \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = \frac{1}{3}.$$

Mutassuk meg, hogy az $A_1B_1C_1$ háromszög K_1 kerülete és az ABC háromszög K kerületére teljesülnek az alábbi egyenlőtlenségek:

$$\frac{1}{2}K < K_1 < \frac{3}{4}K.$$

9.2. (M)

a) Adott szabályos háromszögben határozzuk meg azon M pontok halmazát, melyeknek a háromszög oldalaitól mért távolságaiból mint szakaszokból háromszög szerkeszthető!

b) Adott szabályos tetraéderben határozzuk meg azon M pontok mértani helyét, melyeknek a tetraéder lapjaitól mért távolságaiból mint szakaszokból négyszög szerkeszthető!

9.3. Bizonyítsuk be, hogy egy szimmetrikus trapéz három csúcsától a sík egy tetszőleges pontjáig mért távolságok összege nagyobb, mint a negyedik csúcs távolsága a ponttól!

9.4. (M) [21] Bizonyítsuk be, hogy ha a, b és c egy háromszög oldalai, akkor

$$\left|\frac{a-b}{a+b} + \frac{b-c}{b+c} + \frac{c-a}{c+a}\right| \tag{1}$$

kisebb, mint

a) 1; **b)** $\frac{1}{8}$.

9.5. (S) Igazoljuk, hogy a súlyvonalak négyzetösszege minden háromszögben legfeljebb $27R^2/4$, ahol R a köréírt kör sugara.

Egyenlőség akkor és csakis akkor áll fenn, ha a háromszög szabályos.

9.6. (S) Bizonyítsuk be, hogy a háromszög c oldalához tartozó súlyvonal hossza attól függően nagyobb $c/2$-nél, egyenlő vele, vagy kisebb $c/2$-nél, hogy c-vel szemben hegyes-, derék- vagy tompaszög van.

9.7. (M) Tegyük fel, hogy a háromszög c oldalával szemben nem hegyesszög van. Igazoljuk, hogy ekkor a háromszög három súlyvonalának összege legfeljebb $(0{,}5 + \sqrt{2{,}5})c$.

Mikor áll fenn egyenlőség?

9.8. (S) Igazoljuk, hogy a súlyvonalak hosszának összege minden háromszögben legfeljebb $9R/2$, ahol R a köréírt kör sugara.

Egyenlőség akkor és csakis akkor áll fenn, ha a háromszög szabályos.

9.9. (S) Igazoljuk, hogy a súlyvonalak hosszának összege minden háromszögben legalább $9r$, ahol r a beírt kör sugara.

Egyenlőség akkor és csakis akkor áll fenn, ha a háromszög szabályos.

9.10. (S) Igazoljuk, hogy a magasságvonalak hosszának összege minden háromszögben legalább $9r$, ahol r a beírt kör sugara.

Egyenlőség akkor és csakis akkor áll fenn, ha a háromszög szabályos.

9.11. (S) Igazoljuk, hogy a magasságvonalak hosszának összege minden háromszögben legfeljebb $4{,}5R$, ahol R a köréírt kör sugara.

Egyenlőség akkor és csakis akkor áll fenn, ha a háromszög szabályos.

9.12. (S) Igazoljuk, hogy a szokásos jelölésekkel $27r^3 \leq m_a m_b m_c \leq s_a s_b s_c \leq 27R^3/8$ minden háromszögben.

10. FEJEZET

Az Apollóniusz probléma I.

10.1. Adott a d egyenes továbbá a T és F pontok úgy, hogy T illeszkedik d-re, F pedig nem illeszkedik rá. Szerkesszünk kört, amely átmegy F-en és T-ben érinti d-t!

10.2. Adott a d egyenes, a rá illeszkedő T pont, továbbá a k_f kör. Szerkesszünk kört, amely érinti k_f-et és d-t, az utóbbit épp T-ben!

Hány ilyen kör van?

10.3. Adott a d kör továbbá a T és F pontok úgy, hogy T illeszkedik d-re, F pedig nem illeszkedik rá. Szerkesszünk kört, amely átmegy F-en és T-ben érinti d-t!

10.4. Adott a d kör, a rá illeszkedő T pont, továbbá a k_f kör. Szerkesszünk kört, amely érinti k_f-et és d-t, az utóbbit épp T-ben!

10.5. (M) [11, 20, 9] Adott a d egyenes, továbbá az F és az F' pont. Szerkesszünk kört, amely érinti d-t és átmegy F-en és F'-n!

10.6. Adott a d kör, továbbá az F és az F' pont. Szerkesszünk kört, amely érinti d-t és átmegy F-en és F'-n!

10.7. Adott a d egyenes, a k_F kör továbbá az F' pont. Szerkesszünk kört, amely érinti d-t és k_F-et, ráadásul átmegy F'-n is!

10.8. Adott a d és a k_F kör, továbbá az F' pont. Szerkesszünk kört, amely érinti d-t és k_F-et, ráadásul átmegy F'-n is!

11. FEJEZET
Kör és pont

11.1. Antiparalelek

11.1. Definíció. Egy ABC háromszög síkjában levő XY szakaszt akkor és csak akkor nevezünk *a háromszög BC oldalával antiparalel szakasznak*, ha

– egyik végpontja az AB oldalegyenesen van, a másik végpontja az AC oldalegyenesen, továbbá
– az A-ból induló szögfelezőre vett tükörképe párhuzamos a BC oldal egyenesével.

Hasonlóan definiáljuk a másik két oldallal antiparalel szakaszt is.

a) A definícióban nem mondtuk meg, hogy a belső vagy a külső szögfelezőre tükrözünk. Számít-e, hogy melyikre?

Mutassuk meg, hogy

b) a BC oldallal antiparalel szakaszok mind párhuzamosak egymással.

c) ha XY antiparalel a BC oldallal, akkor vagy mindkét végpontja az A-ból induló, a háromszöggel azonos „oldalon" levő félegyenesre esik, vagy az A pont mindkét végpontját elválasztja a háromszögtől. Utóbbi esetben az antiparalel eshet teljesen a háromszög belsejébe, metszheti a BC oldalt, vagy eshet a BC oldalegyenesnek A-val ellentétes oldalára.

11.2. (M) Adott az ABC háromszög és az XY szakasz, amelynek X végpontja az AB oldalegyenesen, Y végpontja az AC oldalegyenesen van. Bizonyítsuk be, hogy az XY szakasz pontosan akkor antiparalel a BC oldallal, ha az AXY és az ACB háromszögek – a csúcsok ilyen sorrendjében – hasonlóak. (Tehát a két háromszög különböző körüljárású és az A-nál levő szögek azonosak, továbbá például az X-nél levő szög egyenlő a C-nél levő szöggel.)

11.3. (MS) Adott az ABC háromszög és az XY szakasz, amelynek X végpontja az AB oldalegyenesen, Y végpontja az AC oldalegyenesen van. Bizonyítsuk be, hogy az XY szakasz pontosan akkor antiparalel a BC oldallal, ha B, X, C és Y egy körön van.

11.4. (M) Legyen ABC háromszög hegyesszögű, M a magasságpontja. Bizonyítandó, hogy a háromszög talpponti háromszögének oldalai antiparalelek a szemközti oldallal.

11.5. (M) Adott az ABC háromszög, és az XY szakasz, amelynek X végpontja az AB oldalegyenesen, Y végpontja az AC oldalegyenesen van. Bizonyítsuk be, hogy az XY szakasz pontosan akkor antiparalel a BC oldallal, ha merőleges a KA egyenesre, ahol K a háromszög köréírt körének középpontja.

11.6. (S) Adott az ABC háromszög, és az XY szakasz, amelynek X végpontja az AB oldalegyenesen, Y végpontja az AC oldalegyenesen van. Bizonyítsuk be, hogy az XY szakasz pontosan akkor antiparalel a BC oldallal, ha $AX \cdot AB = AY \cdot AC$.

11.7. (M) Legyen ABC egy hegyesszögű háromszög. Bizonyítsuk be, hogy az ABC háromszög területének kétszerese egyenlő a talpponti háromszög kerületének és a köréírt kör sugarának szorzatával.

11.8. (S) Legyen ABC egy hegyesszögű háromszög. Bizonyítsuk be, hogy az ABC háromszög területe egyenlő a talpponti háromszög kerületének és a Feuerbach kör sugarának szorzatával.

11.9. (M) Tekintsük azt az ABC háromszöget, amelynek A, B, C csúcsa rendre egy XYZ háromszög YZ, ZX, XY oldalához írt kör középpontjai. Bizonyítsuk be, hogy például az XY szakasz antiparalel az ABC háromszög AB oldalával.

11.10. (M) Tekintsük azt a háromszöget, amelynek csúcsai az ABC háromszög oldalaihoz írt körök középpontjai. Bizonyítsuk be, hogy ennek a háromszögnek a területe egyenlő az ABC háromszög kerületének és köréírt köre sugarának szorzatával.

11.11. (M) Bizonyítsuk be, hogy az ABC háromszög BC oldalával antiparalel szakaszok felezőpontjai egy A-n átmenő egyenes pontjait adják ki – épp az A pont kivételével.

Definíció. Ezt az egyenest a háromszög A-ból induló *szimediánjának* nevezzük.

Megjegyzés. Az ABC háromszög A-ból induló nevezetes vonalai közül a magasságvonal és a sugáregyenes tükrös az A-ból induló szögfelező(k bármelyiké)re. Az A-ból induló két oldal is tükrös a szögfelező(k)re. Maga a (két) szögfelező önmaga tükörképe. Viszont a súlyvonalnak eddig hiányzott a szögfelezőre vonatkozó tükörképe: ez éppen a szimedián.

Bizonyítsuk be az utóbbi állítást.

Megjegyzés. A háromszög három csúcsán átmenő magasságvonalak egy ponton mennek át. Ugyanez igaz a sugáregyenesekre, a súlyvonalakra és a sugáregyenesekre is. Vajon igaz-e a szimediánokra is? Ezt a kérdést a 11.12. feladat segítségével fogjuk megválaszolni.

11.12. (M) Az ABC háromszög magasságpontjának az oldalakra vett tükörképei a háromszög köréírt körön vannak, tehát a tükörképek által alkotott háromszög oldalfelező merőlegesei éppen a sugáregyenesek.

Hogyan általánosítható ez az állítás?

11.2. Szelő-tétel, körre vonatkozó hatvány

11.1. (MS) Adott a k kör és a belsejében a P pont. A P ponton átmenő egyik szelő az A_1 és A_2 pontokban, a másik szelő a B_1 és B_2 pontokban metszi a k kört. Milyen algebrai összefüggés írható fel a PA_1, PA_2, PB_1, PB_2 szakaszok hosszai között?

11.2. (M) Írjunk fel a 11.1. feladatnak megfelelő összefüggést, ha P a k kör külsejében van!

11.3. (M) Legyenek a P ponton át húzott szelőnek és a k kör közös pontjai A_1 és A_2. Írjuk fel a $PA_1 \cdot PA_2$ szorzat értékét r és d függvényeként, ahol r a k kör sugara, míg d a P pont és k középpontjának távolsága!

11.4. (S) *Szelő-tétel, érintős alak*

Mutassuk meg, hogy ha P a k kör külső pontja és a PT egyenes T-ben érinti k-t, míg egy másik P-n átmenő egyenes az A_1, A_2 pontokban metszi k-t, akkor $PT^2 = PA_1 \cdot PA_2$.

11.5. (M) Adott a P ponton áthaladó egymástól különböző a, b egyenesen két-két pont: A_1 és A_2, illetve B_1 és B_2. Igaz-e, hogy ha az a illetve a b egyenesen előjelesen számolva (az irányításokat figyelembe véve) $PA_1 \cdot PA_2 = PB_1 \cdot PB_2$, akkor az A_1, A_2, B_1, B_2 pontok egy körön vannak?

11.6. Adott egy egyenes és rajta három pont: P, A_1 és A_2. Határozzuk meg mindazon T pontok mértani helyét a síkon, melyekhez van olyan A_1-en, A_2-n és T-n átmenő kör, amelyet érint a PT egyenes!

11.7. Adott a k kör és egy s szakasz. Határozzuk meg azon pontok mértani helyét a síkban, amelyekből a k körhöz húzott érintő hossza megegyezik s hosszával!

11.8. Adott a k kör és egy szakasz, melynek hossza s. Határozzuk meg azon pontok mértani helyét a síkban, amelyeknek a k körre vonatkozó hatványa $-s^2$!

11.9. **a)** Adottak a k_1, k_2 körök. Szerkesztendő 10 olyan pont, amelyekből a két körhöz húzott érintőszakaszok egyenlő hosszúak!

b) Az Euklidesz, Cabri vagy másik dinamikus geometriai szoftver segítségével rajzoljuk ki azon pontok mértani helyét, amelyekből a két körhöz húzott érintőszakaszok egyenlő hosszúak!

11.10. Adottak a k_1, k_2 körök. Határozzuk meg azon pontok mértani helyét, amelyeknek a két körre vonatkozó hatványa egyenlő! Bizonyítsuk is az állítást!

A két kör mely elhelyezkedése esetén nincs ilyen pont?

11.11. Adottak a k_1, k_2, k_3 körök, amelyek közül bármelyik kettő két pontban metszi egymást. Rajzoljuk meg a két közös pontot összekötő egyenest! Tegyünk megfigyelést az így kapott három egyenessel kapcsolatban, majd bizonyítsuk be az észrevételt!

11.12. Adottak a k_1, k_2, k_3 körök, amelyek közül semelyik kettő sem koncentrikus. Határozzuk meg azon pontok mértani helyét, amelyeknek a három körre vonatkozó hatványa egyenlő!

a) A körök mely elhelyezkedése esetén mondhatjuk biztosan, hogy egyetlen ilyen pont van?

b) Adjuk meg a körök egy olyan elhelyezkedését, amikor nincs ilyen pont!

c) Lehetséges-e, hogy végtelen sok ilyen pont van?

11.13. Adottak a k_1, k_2 körök, melyek nem koncentrikusak és közös pontjaik száma

a) 2, **b)** 1, **c)** 0.

Adjunk meg egy, az előzőektől különböző, k_3 kört úgy, hogy a k_1, k_2, k_3 körök közül bármelyik kettőnek ugyanaz az egyenes legyen a hatványvonala!

11.14. Adottak a k_1, k_2 körök, melyek nem koncentrikusak és közös pontjaik száma

a) 2, **b)** 1, **c)** 0.

Adott még a sík egy olyan P pontja is, amely az adott körök egyikére sem illeszkedik. Adjunk meg egy, az előzőektől különböző, k_3 kört P-n át úgy, hogy a k_1, k_2, k_3 körök közül bármelyik kettőnek ugyanaz az egyenes legyen a hatványvonala!

11.15. Adott az A és a B pont, továbbá az ezeket nem tartalmazó k kör. Van-e olyan pont, amelynek bármely – az A és B pontokon átmenő – körre vonatkozó hatványa ugyanakkora, mint a k körre vonatkozó hatványa?

11.16. Adottak a k_1, k_2 körök. Szerkesztendő 10 olyan pont, amelyekből a k_1-hez húzott érintő kétszer akkora, mint a k_2 körhöz húzott érintő!

11.17. Adottak a k_1, k_2 körök. Határozzuk meg azon pontok mértani helyét, amelyekből a k_1-hez húzott érintő kétszer akkora, mint a k_2 körhöz húzott érintő!

11.18. (M) *Két kör Steiner hatványa*

Mutassuk meg, hogy a K, L körökhöz és azok H hasonlósági középpontjához hozzárendelhető egy Λ szám a következő tulajdonsággal: ha a H pontot tartalmazó tetszőleges h egyenesen a K, L körök U_K, V_K pontja a K-t L-re képező H centrumú nagyításnál *nem* egymásnak megfelelő pontpár, akkor $HU_K \cdot HU_L = \Lambda$.

11.3. Vegyes feladatok

11.1. (MS) Bizonyítsuk be, hogy bármely háromszögben teljesül az alábbi összefüggés:

$$r^2 - d^2 = 2r\rho,$$

ahol ρ a háromszög beírt körének sugarát , r a körülírt kör sugarát, d pedig a két középpont távolságát jelöli!

11.2. (M) [17] Adott két kör és egy pont. Szerkesztendő az adott pontot tartalmazó egyenes, amelyből a körök egyenlő hosszú húrokat metszenek le.

11.3. (MS) [18] Mutassuk meg, hogy a beírt kör középpontja és a körülírt kör középpontja közti II_A szakasz hossza a beírt, körülírt és az a oldalhoz hozzáírt kör sugarával az $II_A^2 = 4R(r_a - r)$ alakban fejezhető ki.

11.4. (MS) [18] Adott az ABC háromszög. A háromszög X belső pontjára jelölje A_1 az AX egyenesnek a háromszög körülírt körének az A csúcstól különböző metszéspontját. Igazoljuk az

$$\frac{BX \cdot CX}{A_1X} \geq 2r$$

egyenlőtlenséget, ahol r a beírt kör sugara. Mely X-re áll fenn az egyenlőség?

12. FEJEZET
A sík hasonlósági transzformációi

Hasonlósági transzformáció: A sík olyan önmagára való leképezése, amely megtartja a szakaszok hosszának arányát.

12.1. Kutatás

12.1. [6] Jelölje a k, l körök egyik metszéspontját A. Forgassuk az A ponton átmenő a egyenest A körül és képezzük a k, l körökkel vett második metszéspontjait, a $K \in k$, $L \in l$ pontokat.

Vizsgáljuk a KL szakaszra állított KLP szabályos háromszöget, tegyünk megfigyeléseket, fogalmazzunk meg sejtéseket!

12.2. Osztályozás

12.1. Adott a síkon a P_1, Q_1 és a P_2, Q_2 pontpár. Keressük mindazokat a hasonlósági transzformációkat, amelyek a P_1 pontot P_2-be, a Q_1 pontot Q_2-be képezik. Tegyük fel, hogy egy ilyen transzformációról még azt is tudjuk, hogy

a) irányítástartó; **b)** irányításváltó.

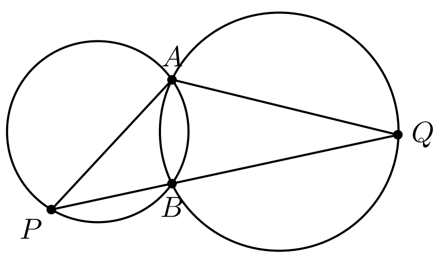
Mutassuk meg, hogy a két pont és a képe valamint az irányítástartás ill. váltás ténye már tetszőleges X pont képét egyértelműen meghatározza a síkon!

c) Igazoljuk, hogy létezik is ilyen transzformáció mind az a), mind a b) esetben.

12.3. Forgatva nyújtás – négy háromszög tétele

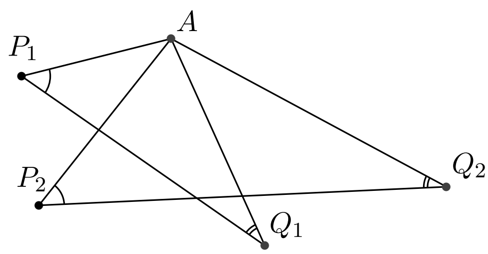
Ide kapcsolódnak a korábbi 6.1.–6.7. feladatok. Reiman István: Fejezetek az elemi geometriából[10] című könyvének 2.8. a Nyújtva forgatás fejezete tárgyalja ezt a témát.

12.1. (S) Adott két kör, melyek egymást két különböző pontban metszi. Mutassuk meg, hogy a két kör egyik közös pontján át húzott szelő, a másik közös pontból állandó szögben látszik (az 1. ábrán a $PAQ\angle$ független a PQ szelő választásától).



12.1.1. ábra.

12.2. Hol vannak az 1. ábrán az egymáshoz hasonló, azonos körüljárású P_1AQ_1, P_2AQ_2 háromszögek köréírt körének metszéspontjai?



12.2.1. ábra.

12.3. (M) Adottak az P_1, Q_1, P_2, Q_2 pontok. Mutassuk meg, hogy ha a $P_1Q_1Q_2P_2$ négyszög nem paralelogramma, akkor létezik olyan A pont, amely körüli megfelelő szögű és arányú forgatva nyújtás a P_1 pontot Q_1-be, a P_2 pontot Q_2-be képezi.

12.4. (S) Adott négy egyenes. Ha bármelyiket elhagyjuk, akkor képezhetjük a maradék három egyenes alkotta háromszög körülírt körét. Mutassuk meg, hogy az így kapott négy körnek van egy közös pontja.

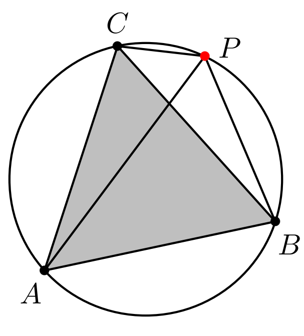
12.5. (S) [6] Tegyük fel, hogy az F alakzat irányítását nem változtatva önmagához hasonlóan változik, miközben valamely O pontja (amely a hasonlóságnál mindig önmagának felel meg) helyben marad. Mutassuk meg, hogy ha

a) az alakzat egy A pontja valamely γ görbét ír le, akkor az alakzat bármely másik – nem fix – pontja egy γ-hoz hasonló görbét ír le!

b) az alakzat egy a egyenese a változás minden pillanatában átmegy a sík egy rögzített pontján, akkor az alakzat bármely egyenese minden helyzetében átmegy egy rögzített ponton!

12.4. Ptolemaiosz tétele

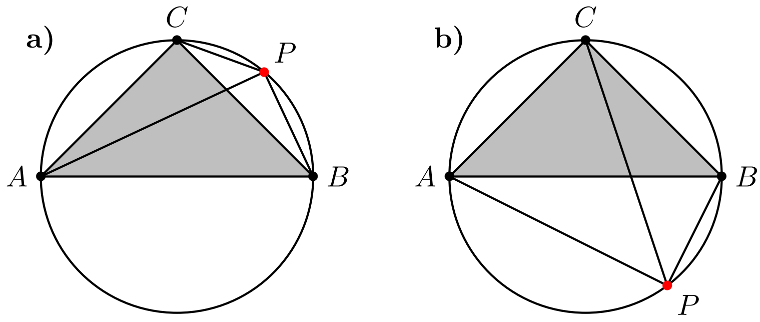
12.1. (S) Mutassuk meg, hogy a szabályos háromszög köré írt kör egy pontját a csúcsokkal összekötő három szakasz közül az egyik egyenlő a másik kettő összegével (az 1. ábrán $PA =$ $= PB + PC$)!



12.1.1. ábra.

12.2. (S) Az ABC egyenlő szárú derékszögű háromszög ($AC = CB$, $AC \perp CB$) körülírt körének

a) rövidebbik $\widehat{BC}$ ívén
b) C-t nem tartalmazó $\widehat{AB}$ ívén
helyezkedik el a P pont (lásd az 1. ábrát). Milyen összefüggés írható fel a PA, PB, PC szakaszok hossza között?



12.2.1. ábra.

12.3. Az ABC háromszög szögei
a) $\alpha = \beta = \gamma = 60°$; **b)** $\alpha = \beta = 45°$, $\gamma = 90°$.

Írjuk fel a PA, PB, PC szakaszhosszak olyan kifejezését, amely pontosan akkor zérus, ha P a háromszög körülírt körén van!

12.4. Az ABC háromszög szögei
a) $\alpha = \beta = \gamma = 60°$; **b)** $\alpha = \beta = 45°$, $\gamma = 90°$.

Írjuk fel a $PA^2 = x$, $PB^2 = y$, $PC^2 = z$ kifejezések olyan *polinom*ját, amely pontosan akkor zérus, ha P a háromszög körülírt körén van!

12.5. Mutassuk meg, hogy ha az ABC háromszög szabályos és P tetszőleges pont a síkon, akkor $PC + PB \geq PA$!

Melyek azok a P pontok, amelyekre a fenti egyenlőtlenségben az egyenlőség teljesül?

12.6. Az ABC háromszög egyenlő szárú és derékszögű ($AC = CB$, $AC \perp CB$).

A 12.5. feladat mintájára írjunk fel a PA, PB, PC szakaszok hosszára vonatkozó olyan egyenlőtlenséget, amely a sík minden P pontjára teljesül és az egyenlőség pontosan akkor áll, ha P az ABC háromszög körülírt körének
a) $\widehat{BC}$; **b)** $\widehat{CA}$; **c)** $\widehat{AB}$
ívén helyezkedik el!

12.7. (MS) (*Ptolemaiosz tétel*) Mutassuk meg, hogy a sík bármely A, B, C, D pontnégyesére fennáll az

$$AB \cdot CD + BC \cdot DA \geq AC \cdot BD$$

egyenlőtlenség és az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha a négy pont egy körön (vagy egyenesen) helyezkedik el és azon az AC pontpár elválasztja a BD pontpárt!

A témához kapcsolódó hasznos kiegészítő anyag Kubatov Antal „Ptolemaios-tétel, Casey-tétel, feladatok”[2] című írása a Fazekas Matematika Portálján.

12.5. Forgatva nyújtások kompozíciója

12.1. (M) [7] Az ABC háromszög oldalaira kifelé az alább megadott szögekkel rendelkező ABM, BCN, CAP háromszögeket szerkesztettük:

$$CAP\angle = CBN\angle = 45^\circ \qquad ACP\angle = BCN\angle = 30^\circ \qquad ABM\angle = BAM\angle = 15^\circ.$$

Mit állíthatunk a PMN háromszögről? Fogalmazzunk meg sejtést és igazoljuk állításunkat!

12.2. (M) [7] Az ABC háromszög oldalaira kifelé az alább megadott szögekkel rendelkező ABM, BCN, CAP háromszögeket szerkesztettük:

$$BAM\angle = CAP\angle = 15^\circ \qquad ABM\angle = CBN\angle = 30^\circ \qquad ACP\angle = BCN\angle = 45^\circ.$$

Határozzuk meg a PMN háromszög szögeit!

12.3. (M) [7] Az ABC háromszög oldalaira kifelé szerkesztettük az AMB, BNC, AKC szabályos háromszögeket. Mutassuk meg, hogy a CM szakasz merőleges a BNC, AKC háromszögek középpontjait összekötő PQ szakaszra és e két szakasz aránya: $\frac{CM}{PQ} = \sqrt{3}$.

12.4. (M) [7] Az $ABCD$ konvex négyszög oldalaira kifelé szabályos háromszögeket szerkesztettünk. Mutassuk meg, hogy két szemközti oldalra emelt szabályos háromszögnek a négyszög csúcsaitól különböző csúcsát összekötő szakasz merőleges a másik két oldalra emelt szabályos háromszög középpontját összekötő szakaszra! Határozzuk meg e két szakasz hosszának arányát!

12.5. [7] Az ABC háromszög AB oldalán az $ACE\angle = \gamma$, $BCF\angle = \gamma$ összefüggéseknek megfelelően vettük fel az E, F pontokat. Az A-ból illetve B-ből az CE illetve CF egyenesre bocsátott merőleges talppontja M illetve N, a K pont pedig az AB szakasz felezőpontja. Mutassuk meg, hogy $KM = KN$ és $KMN\angle = \gamma$.

12.6. [7] Adott a konvex $ABNCM$ ötszög. Tudjuk, hogy BCN és ACM olyan derékszögű háromszögek, amelyek átfogója BC illetve AC és amelyekben $BCN\angle = ACM\angle$. Az AB oldal K felezőpontján át húzott KM, KN egyenesek a BC illetve az AC egyenest a P illetve a Q pontban metszik. Mutassuk meg, hogy a C, M, N, P, Q pontok mind egy körön vannak.

12.7. [7] Az ABC háromszög oldalaira kifelé az alább megadott szögekkel rendelkező ABM, BCN, CAP háromszögeket szerkesztettük:

$$CBN\angle = CAP\angle = \alpha \qquad ACP\angle = ABM\angle = \beta \qquad BAM\angle = BCN\angle = \gamma,$$

ahol $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$. Határozzuk meg a PMN háromszög szögeit!

12.8. [7] Az ABC háromszög BC, AC oldalaira kifelé szerkesztett BCM, ACN háromszögekre $BMC\angle = ANC\angle = 90^\circ$, $\frac{CM}{BM} = \frac{1}{3}$, $\frac{CN}{AN} = \frac{1}{2}$. Az AB oldalon felvett K pontra $\frac{AK}{BK} = \frac{2}{3}$. Határozzuk meg $MKN\angle$ nagyságát!

12.6. Vegyes feladatok

12.1. (M) *A 2004. évi Nemzetközi Matematikai Diákolimpia 5. feladata*

Az $ABCD$ konvex négyszög BD átlója az ABC és a CDA szöget sem felezi. A P pont az $ABCD$ négyszög belsejében úgy helyezkedik el, hogy

$$PBC\angle = DBA\angle \qquad \text{és} \qquad PDC\angle = BDA\angle.$$

Mutassuk meg, hogy az $ABCD$ négyszög pontosan akkor húrnégyszög, ha $AP = CP$.

13. FEJEZET
Parabola, ellipszis, hiperbola

13.1. a) Használjunk dinamikus geometriai szoftvert (pl. Euklidest vagy Cabrit) az alábbi feladat megoldásához!

Adott a d egyenes továbbá a T és F pontok úgy, hogy T illeszkedik d-re, F pedig nem illeszkedik rá. Szerkesszük meg annak a körnek a középpontját, amely átmegy F-en és T-ben érinti d-t (10.1. feladat)!

b) Rajzoltassuk ki a középpontok mértani helyét, ha T befutja a d egyenest!

c) Rajzoltassuk ki az FT szakasz felezőmerőlegeseit, ha T a d egyenesen fut!

13.2. a) Használjunk dinamikus geometriai szoftvert (pl. Euklidest vagy Cabrit) az alábbi feladat megoldásához!

Adott a d kör továbbá a T és F pontok úgy, hogy T illeszkedik d-re, F pedig nem illeszkedik rá. Szerkesszük meg annak a körnek a középpontját, amely átmegy F-en és T-ben érinti d-t (10.1. feladat)!

b) Rajzoltassuk ki a középpontok mértani helyét, ha T befutja a d kört!

c) Rajzoltassuk ki az FT szakasz felezőmerőlegeseit, ha T a d körön fut!

d) Mozgassuk az F pontot (a d körön kívülre és belülre is) miközben a b) és (vagy) a c) feladatrész megoldása is látszik az ábrán!

13.3. a) Adott egy ellipszis az F_1 fókuszával és az F_2 (fókusz)pont körüli d vezérkörével. Mutassuk meg, hogy a P pont akkor és csakis akkor illeszkedik az ellipszisre, ha

$$F_1P + PF_2 = 2a,$$

ahol $2a$ a d vezérkör sugara.

b) Adott a síkon az F_1 és az F_2 pont, továbbá az a nemnegatív szám. Tekintsük azon P pontok mértani helyét a síkon, amelyekre $F_1P + PF_2 = 2a$. Mutassuk meg, hogy $2a > F_1F_2$ esetén ez a mértani hely egy ellipszis! Mi a kérdezett mértani hely $2a = F_1F_2$, illetve $2a < F_1F_2$ esetén?

13.4. Adott egy parabola az F fókuszpontjával és a d vezéregyenesével. Legyen T a vezéregyenes tetszőleges pontja. Mutassuk meg, hogy az FT szakasz felezőmerőlegese geometriai értelemben érinti a parabolát, azaz

a) pontosan egy közös pontja van a parabolával;

b) összes többi pontja a parabola külső pontja, azaz közelebb van a vezéregyeneshez, mint a fókuszponthoz.

13.5. Adott egy ellipszis az F_1 fókuszpontjával és az F_2 (fókusz)pont körüli d vezérkörével. Legyen T a vezérkör tetszőleges pontja. Mutassuk meg, hogy az FT szakasz felezőmerőlegese geometriai értelemben érinti az ellipszist, azaz

a) pontosan egy közös pontja van az ellipszissel;

b) összes többi pontja az ellipszis külső pontja, azaz közelebb van a vezérkörhöz, mint a fókuszponthoz.

13.6. Adott egy parabola az F fókuszpontjával és a d vezéregyenesével és adott még egy e egyenes is. Szerkesszük meg az e egyenes és a parabola közös pontjait! Az e egyenes elhelyezkedésétől függően hány közös pontja van a parabolával?

13.7. Adott egy parabola az F fókuszpontjával és a d vezéregyenesével. Mutassuk meg, hogy az e egyenes pontosan akkor érinti a parabolát, ha az F pont e-re vonatkozó tükörképe illeszkedik d-re!

13.8. Adott egy ellipszis az F_1 fókuszpontjával és az F_2 fókuszpont körüli d vezérkörével és adott még egy e egyenes is. Szerkesszük meg az e egyenes és az ellipszis közös pontjait! Az e egyenes elhelyezkedésétől függően hány közös pontja van az ellipszissel?

13.9. Adott egy ellipszis az F_1 fókuszpontjával és az F_2 fókuszpont körüli d vezérkörével. Mutassuk meg, hogy az e egyenes pontosan akkor érinti az ellipszist, ha az F_1 pont e-re vonatkozó tükörképe illeszkedik d-re!

13.10. **a)** Mutassuk meg, hogy a parabola bármely pontján át pontosan egy geometriai értelmű érintő húzható a parabolához.

b) Igazoljuk, hogy a parabola bármely külső pontján át pontosan két geometriai értelmű érintő húzható a parabolához, azaz pontosan két olyen egyenes, amelynek egy közös pontja van a parabolával és az összes többi pontja külső pont.

13.11. Adott a d kör és rajta kívül az F pont. A d körön felvett T ponthoz szeretnénk olyan k_T kört rajzolni, amely T-ben érinti d-t és átmegy az F ponton is.

a) A d kör mely T pontjaihoz nincs ilyen kör?

b) A d kör mely T pontjaihoz tartozik olyan k_T kör, amely a belsejében tartalmazza a d kört?

13.12. Mi azon pontok mértani helye a síkban, ahonnan egy adott parabola derékszögben látszik (azaz a pontból a parabolához húzott két érintő szöge derékszög)?

14. FEJEZET
Térgeometria

14.1. (M) Adott két pont. Határozzuk meg az összes olyan síkot, amelytől a két pont egyenlő távolságra van!

14.2. (M) Adott tetraéderhez hány olyan sík van, amely egyenlő távolságra van mind a négy csúcsától?

14.3. Mutassuk meg, hogy a szabályos tetraéder valamely csúcsából induló testmagasság felezőpontját a többi csúccsal összekötő egyenesek páronként merőlegesek egymásra.

14.4. Jelölje az $ABCDEFGH$ kocka $EFGH$ lapjának középpontját M. Határozzuk meg az
- **a)** AM egyenes és a BH testátló szögét!
- **b)** AMB sík és a BH testátló szögét!
- **c)** AM egyenesnek és a BH testátló távolságát!
- **d)** Hol metszi az AM, BH egyenesek normáltranzverzálisa a BH testátlót?

14.5. Hogyan kell megválasztani az $\underline{a}$, $\underline{b}$ vektorokat, hogy bármely α, β valós számra az $\alpha\underline{a}+\beta\underline{b}$, $\beta\underline{a}-\alpha\underline{b}$ vektorok merőlegesek legyenek egymásra?

14.6. Vezessük le az affin térgeometria axiómáiból az egyenesek párhuzamosságának tranzitivitását: ha $a||b$ és $b||c$, akkor $a||c$.

14.7. Egy szabályos ötoldalú gúla minden éle egységnyi. Határozzuk meg egy alapélnek az oldalélektől való távolságát! Gondoljunk az összes szóbajövő távolságra!

14.8. Egy szabályos ötoldalú gúla minden éle egyenlő. Mekkora szöget zár be egy oldalél az alapélekkel? Gondoljunk az összes szóbajövő szögre!

14.9. Egy szabályos gúla minden éle egyenlő. Számítsuk ki két szomszédos oldallapjának hajlásszögét! Gondoljunk az összes szóbajövő gúlára!

14.10. Jelöle az $ABCD$ tetraéder ABC lapjának magasságpontját M_D, a BCD lap magasságpontját M_A. Mutassuk meg, hogy ha az AM_A, DM_D egyenesek metszik egymást, akkor az AD, BC élek merőlegesek egymásra.

14.11. Bizonyítsuk be, hogy egy tetraéder akkor és csakis akkor ortocentrikus, ha a szemköztes élek felezőpontjait összekötő szakaszok mind egyenlőek.

14.12. Mutassuk meg, hogy ha egy $2k-1$ oldalú gúla $2k-2$ oldaléle rendre merőleges a szemközti oldalélre, akkor a $(2k-1)$-edik oldalél is merőleges az azzal szemközti alapélre.

14.13. Az $ABCDE$ négyzet alapú gúla EA, EB, EC, ED oldaléleit a Σ sík rendre az A_1, B_1, C_1, D_1 pontokban metszi. Az EA_1/A_1A, EB_1/B_1B, EC_1/C_1C arányok értéke rendre 1, 2 és 3. Határozzuk meg az ED_1/D_1D arány értékét!

14.14. Egy város autóbuszjáratairól a következőket tudjuk:

I. Mindegyik járaton 3 megálló van.

II. Mindegyik járatról át lehet szállni bármelyik másikra, de csak egy megállónál.

III. Bármelyik megállóból eljuthatunk bármelyik másik megállóba, de átszállás nélkül csak egy járattal.

Hány autóbuszjárat van ebben a városban?

14.15. Adott a térben n sík ($n \geq 5$) úgy, hogy bármelyik háromnak pontosan egy közös pontja van, és nincs a térnek olyan pontja, amelyen közülük háromnál több menne át. Bizonyítsuk be, hogy azon térrészek között, melyekre a síkok a teret darabolják, legalább $\frac{2n-3}{4}$ tetraéder van.

14.16. A tér pontjait kiszínezzük 5 színnel (mind az 5 szín ténylegesen előfordul). Bizonyítsuk be, hogy van olyan sík, amelyik legalább 4 különböző színű pontot tartalmaz.

15. FEJEZET
Axiomatikus térgeometria

Ebben a fejezetben megkíséreljük a térgeometria axiomatikus bevezetésével. A bizonyításokban megpróbálunk megszabadulni a szemléletességre hivatkozó gondolatmenetektől.

Adott egy halmaz, $\mathcal{P}$, ennek elemeit nevezzük *pontoknak*. A $\mathcal{P}$ halmaz bizonyos részhalmazait *egyenes*eknek, bizonyos részhalmazait pedig *sík*oknak nevezzük. Formálisan tekintve tehát adott a $\mathcal{P}$ halmaz bizonyos részhalmazaiból álló $\mathcal{E}$ halmaz, az egyenesek halmaza, továbbá $\mathcal{S}$, a síkok halmaza, amelyről elvont megközelítésünkban egyelőre csak annyit tételezünk fel, hogy a $\mathcal{P}$ halmaz bizonyos részhalmazaiból álló halmaz.

A $\mathcal{P}$ halmaz elemeit (tehát a pontokat) általában nagybetűkkel $(A, B, C, P, Q, \ldots)$, $\mathcal{E}$ elemeit (az egyeneseket) kisbetűkkel $(e, f, \ldots)$, $\mathcal{S}$ elemeit (a síkokat) pedig nagy görög betűkkel (Σ, Π) jelöljük.

Az $A \in e$ relációt így is olvashatjuk: „az A pont illeszkedik az e egyenesre" vagy "az e egyenes átmegy az A ponton". Megfordítva, ha alább valahol azt olvassuk, hogy „az A pont illeszkedik az e egyenesre", akkor csak arról van szó, hogy $A \in e$.

Az *axiómák* a $\mathcal{P}$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{S}$, halmazokra fogalmaznak meg feltételeket. Ha a $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{S})$ hármasra teljesülnek az alábbi axiómák, akkor azt mondjuk, hogy $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{S})$ egy affin térgeometria.

A feladatok megoldásához csak az axiómákban kimondott feltételeket használhatjuk, illetve hivatkozhatunk olyan feladatokra, állításokra, amelyeket az axiómákból már kikövetkeztettünk.

Az axiomatizálásban tehát nem jutunk nagyon messze, megmaradunk az illeszkedéssel kapcsolatos axiómáknál, az *affin* geometriánál. A rendszert a ... feladatban kimondott axiómákkal később bővítjük, miáltal néhány, a merőlegesség fogalmával kapcsolatos téma is elérhetővé válik.

Definíciók

Párhuzamosság Azt mondjuk, hogy két egyenes *párhuzamos*, ha nincs közös pontjuk, de van olyan sík, amelyben mind a kettő benne van. Két síkról, illetve két egyenesről akkor mondjuk, hogy párhuzamosak, ha nincs közös pontjuk. Akkor mondjuk két egyenesről, hogy *egyállású*ak, ha párhuzamosak vagy egybeesnek.

Kitérő egyenesek Azt mondjuk, hogy két egyenes kitérő, ha nincs olyan sík, amely tartalmazza mind a kettőt.

Az affin geometria axiómái

S1. Bármely két különböző ponton át egy és csakis egy egyenes húzható. (Azaz $A \in \mathcal{P}, B \in \mathcal{P} \Longrightarrow \exists!\, e \in \mathcal{E}, A \in e, B \in e$.)

S2. Bármely ponton át, bármely őt nem tartalmazó egyeneshez egy és csakis egy párhuzamos egyenes húzható.

T1. Bármely három pontra, amelyek nincsenek egy egyenesen egy és csakis egy sík illeszkedik.

T2. Ha két síknak van közös pontja, akkor a közös pontok halmaza egy egyenes.

ntE. Bármely egyenesnek legalább két pontja van.

ntS. Bármely síkban van három olyan pont, amelyek nincsenek egy egyenesen.

ntT. Létezik négy olyan pont, amelyek nincsenek egy síkban és nincsenek egy egyenesen sem.

Az axiómák jelölésében „S” a „sík”-ra, „T” a „tér”-re utal, az „nt” kezdetű axiómák a triviális modelleket zárják ki.

Axiomatizálhatjuk önmagában a síkot is a tér nélkül. Ebben az esetben csak a $\mathcal{P}$ halmaz (pontok) és az annak bizonyos részhalmazaiból álló $\mathcal{E}$ halmaz (egyenesek) adottak. Ha teljesülnek rájuk az **S1.**, **S2.**, **ntE.**, **ntS.** axiómák (két egyenest most akkor tekintünk párhuzamosnak, ha nincs közös pontjuk), akkor azt mondjuk, hogy a $(\mathcal{P}, \mathcal{E})$ pár egy affin sík.

15.1. Szükséges-e az **ntT.** axióma vége? Meg lehet-e adni olyan $\mathcal{P}$ halmazt és megfelelő részhalmazainak egy $\mathcal{E}$ halmazát úgy, hogy teljesüljön az affin geometria összes axiómája, kivéve az **ntT.** axiómát, amely nem teljesülm viszont teljesül az alábbi, gyengébb **ntTa.** axióma:

ntTa. Létezik négy olyan pont, amelyek nincsenek egy síkban.

15.2. (M) Vezessük le az alábbi állítást az affin geometria axiómáiból!

Ha egy sík tartalmazza egy egyenes két pontját, akkor a teljes egyenest tartalmazza.

15.3. (M) Hogyan lehet megadni egy síkot? Vezessük le az alábbi állításokat az affin geometria axiómáiból!

a) *Ha adott két metsző egyenes, akkor pontosan egy olyan sík van, amely mind a kettőt tartalmazza.*

b) *Ha adott egy egyenes és egy rá nem illeszkedő pont, akkor pontosan egy olyan sík van, amely mind a kettőt tartalmazza.*

c) *Ha adott két párhuzamos egyenes, akkor pontosan egy olyan sík van, amely mind a kettőt tartalmazza.*

15.4. (M) Vezessük le az alábbi állításokat az affin geometria axiómáiból!

a) *Ha egy egyenes részhalmaza egy másik egyenesnek, akkor megegyezik vele.*

b) *Ha egy sík részhalmaza egy másik síknak, akkor megegyezik vele.*

15.5. Vezessük le az alábbi állítást az affin geometria axiómáiból!

Két egyenes helyzete négyféle lehet: egybeesnek, metszők, párhuzamosak, kitérők.

15.6. Vezessük le az alábbi állítást az affin geometria axiómáiból!

Egyenes és sík helyzete háromféle lehet: az egyenes része a síknak, pontosan egy közös pontjuk van, párhuzamosak.

15.7. (M) Vezessük le az alábbi állításokatt az affin geometria axiómáiból! **a)** *Ha adott egy egyenes és egy vele párhuzamos sík, akkor az egyenest tartalmazó bármely sík az adott síkkal vagy párhuzamos vagy egy olyan egyenesben metszi, amely párhuzamos az adott egyenessel.*

b) *Ha egy egyenes párhuzamos egy sík valamely egyenesével, akkor vagy párhuzamos a síkkal is vagy része a síknak.*

15.8. (M) Vezessük le az alábbi állításokat az affin geometria axiómáiból!

a) *Ha két párhuzamos sík mindegyikét metszi egy harmadik sík, akkor a két létrejövő metszésvonal egymással párhuzamos.*

b) *Bármely ponton át, bármely rá nem illeszkedő síkhoz pontosan egy párhuzamos sík húzható.*

c) *A b) pontban meghatározott sík az adott ponton átmenő az adott síkkal párhuzamos egyenesek uniója.*

15.9. (M) Vezessük le az alábbi állításokat az affin geometria axiómáiból!

a) *Ha metszősíkok egy-egy egyenese egymással párhuzamos, akkor egyállásúak a két sík metszésvonalával is.*

b) *Ha egy egyenes két metsző sík mindegyikével párhuzamos, akkor azok metszésvonalával is párhuzamos.*

15.10. (M) Vezessük le az alábbi állítást az affin geometria axiómáiból!

Ha az a egyenes párhuzamos a b egyenessel, a b egyenes pedig párhuzamos a c egyenessel, akkor az a egyenes egyállású a c egyenessel.

15.11. (M) Vezessük le az alábbi állításokat az affin geometria axiómáiból!

a) *Ha adott két kitérő egyenes, akkor bármelyiken át pontosan egy olyan sík húzható, amelyik párhuzamos a másik egyenessel.*

b) *Az a) pontban meghatározott két sík egymással is párhuzamos.*

15.12. (M) Vezessük le az alábbi állításokat az affin geometria axiómáiból!

a) *Bármely affin síknak legalább 4 pontja van.*

b) *Bármely affin (tér)geometriának legalább 8 pontja van.*

15.13. Van-e olyan affin

a) *sík(geometria), amelynek 4 pontja van?*

b) *tér(geometria), amelynek 8 pontja van?*

15.14. Adott egy affin sík és abban egy egyenes, amelynek k db pontja van.

a) Mutassuk meg, hogy az affin sík minden egyenesének k pontja van.

b) Mutassuk meg, hogy az affin sík minden pontját ugyanannyi egyenes tartalmazza!

c) Hány pontból áll a sík?

d) Hány egyenes van a síkon?

15.15. (M) Keressük meg a merőlegesség legalapvetőbb tulajdonságait. Próbáljuk meg axiomatizálni a merőlegesség fogalmát.

16. FEJEZET
Speciális témák

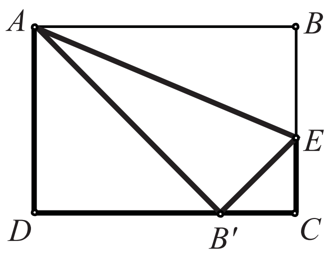
16.1. Origami

16.1. Az A4 és A3 méretű papírlapokról a következők tudhatók:

1. Egy A3-as lapot félbetépve két A4-es méretű lapot kapunk.
2. Az A4-es lap felnagyítható A3-assá.

a) Határozzuk meg az A4-es (és A3-as) lap oldalainak arányát!

b) Egy A4-es lapot az A csúcsán átmenő AE egyenes mentén behajtjuk és azt tapasztaljuk, hogy B csúcsa épp a CD oldalra kerül (lásd az 1. ábrát, ahol $B' \in CD$!). Igaz-e, hogy a $CB'E$ háromszög egyenlő szárú?



16.1.1. ábra.

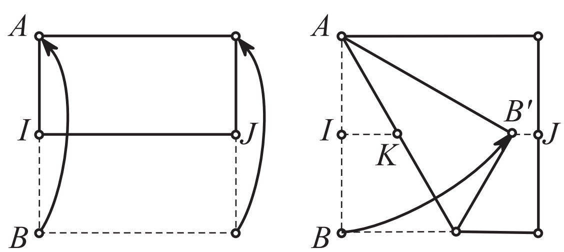
16.2. Egy A4-es lap egyik hosszú oldalának felezőpontja F, a vele szemközti oldal CD.

a) Hány olyan egyenes van, amelyen áthajtva F-et épp a CD oldalra kerül?

b) Készítsünk el sok ilyen hajtásvonalat. Mit rajzolnak ki ezek?

16.3. [22] Egy négyzetalakú papírlapot (az 1. ábrán $ABCD$) először félbehajtunk, hogy megjelenjen az IJ felezővonal, majd visszahajtjuk és egy A-ból induló megfelelő egyenes (AC) mentén úgy hajtjuk, hogy B rákerüljön a felezővonalra ($B' \in IJ$). Az ábrán több szög nagysága 60°-nak tűnik.

Válasszuk ki az egyiket és igazoljuk, hogy valóban 60°-os!



16.3.1. ábra.

16.4. [5] Az 1. ábrán egy négyzet alakú papírlap ($ABCD$) látható, amelyet egy egyenes mentén (EF) behajtunk. A hajtásvonalat úgy sikerült megválasztani, hogy az egyik csúcs (C) és egy szemközti oldalvonalra került ($C' \in AB$).

a) Igazoljuk, hogy a $C'D'$ egyenes érinti azt a C középpontú kört, amely átmegy B-n és D-n.

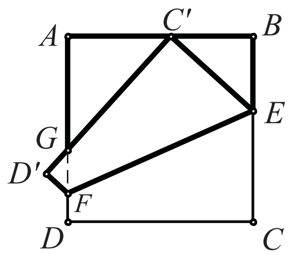
b) Igazoljuk, hogy a GAC' háromszög kerülete egyenlő az $ABCD$ négyzet kerületének felével.

c) Bizonyítsuk be, hogy $AG = C'B + GD'$.

d) Mutassuk meg, hogy a $C'BE$, $GD'F$ háromszögek kerületének összege megegyezik a GAC' háromszög kerületével.

e) Mutassuk meg, hogy a $GD'F$ háromszög kerülete egyenlő az AC' szakasz hosszával.

f) Igazoljuk, hogy a GAC' háromszög beírt körének sugara egyenlő a GD' szakasz hosszával.

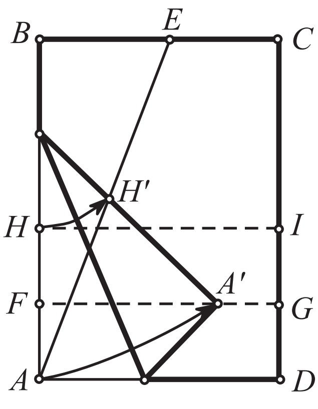


16.4.1. ábra.

16.5. [5] *Szögharmadolás*

A téglalap alakú papírlap sarkában elhelyezett $BAE\angle$ -et szeretnénk megharmadolni (lásd az 1. ábrát).

Ismételt hajtásokkal létrehozzuk az AD-vel párhuzamos FG, HI hajtásvonalakat. Ezután úgy hajtunk, hogy A rákerüljön FG-re ($A' \in FG$, miközben H épp AE-re kerül $H' \in AE$. Mutassuk meg, hogy AA' harmadolja a $CAD\angle$ szöget!



16.5.1. ábra.

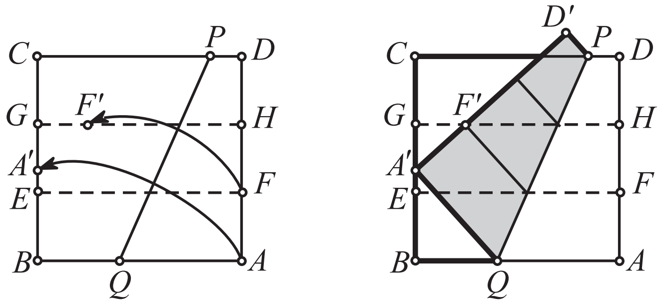
16.6. [5] *Kockakettőzés*

Adott egy négyzet alakú papírlap ($ABCD$), amin már be van rajzolva két harmadolóvonal (Az 1. ábrán EF és GH, $AF = FH = HD$, $BE = EG = GC$). Hajtsuk be a papírlapot úgy, hogy A a BC oldalra essen ($A' \in BC$, mikötben F a GH egyenesre kerül ($F' \in GH$.

Határozzuk meg a $\frac{CA'}{A'B}$ arány értékét!

16.7. (M) [5] *Hányszor lehet félbehajtani egy papírt?*

Legalább milyen hosszú kell legyen egy papírcsík, ha n-szer szeretnénk félbehajtani? A hajtásokat mindig a csík hosszanti irányára merőlegesen végezzük. A papír vastagsága legyen d. Ahhoz, hogy a papír ne szakadjon el, az kell, hogy sehol se nyúljon meg, legfeljebb összenyomódhat! Ezen feltételezés alapján az első hajtás során például $d\pi$ hosszúságú papírdarab fordítódik a hajtás részre, mert ekkora a hajtásnál keletkező félkör ívének külső sugara.



16.6.1. ábra.

a) Adjuk meg a papírcsík minimális $L(d, n)$ hosszát zárt alakban!

b) Mi a helyzet akkor, ha négyzet alakú papírból indulunk ki és váltogatjuk a hajtás irányát? Ezesetben mekkora $W = W(d, n)$ oldalhosszúságú négyzetre van szükség, hogy n-szer félbe tudjuk hajtani?

c) Mekkora papírdarabra van szükség az egyik illetve a másik esetben, ha 12-szer szeretnénk félbehajtani a papírt? Melyiknek raálisabb a megvalósítása?

16.2. Kutatási feladatok

16.1. Vegyünk fel négy pontot és vizsgáljuk az általuk meghatározott négy háromszög négy Feuerbach körét!

16.2. Vegyük fel az ABC háromszöget, szerkesszük meg annak f_a, f_b, f_c belső szögfelezőit és tekintsünk egy P pontot. Tükrözzük az AP egyenest f_a-ra, BP-t f_b-re, CP-t f_c-re. Vizsgáljuk az így kapott egyeneshármast!

16.3. A háromszög két Brocard pontja

16.1. (M) Adott az ABC háromszög. Tekintsük

– azt a k_1 kört, amely átmegy A-n és a BC oldalt B-ben érinti,
– azt a k_2 kört, amely átmegy B-n és a CA oldalt C-ben érinti,
– azt a k_3 kört, amely átmegy C-n és az AB oldalt A-ban érinti.

Bizonyítsuk be, hogy e három kör egy ponton megy keresztül.

16.2. (S) Bizonyítsuk be, hogy pontosan egy olyan Q pont van az ABC háromszög belsejében, amelyre igaz, hogy $ACQ\angle = CBQ\angle = BAQ\angle$.

Bizonyítsuk be, hogy pontosan egy olyan R pont van az ABC háromszög belsejében, amelyre igaz, hogy $CAR\angle = BCR\angle = ABR\angle$.

Definíció. E két pontot a háromszög két *Brocard-pontjának* nevezik.

16.3. (S) Tekintsük a háromszög két Brocard-pontját, tehát a 16.2. feladatban szereplő Q és R pontot. Bizonyítsuk be, hogy a hozzájuk tartozó $ACQ\angle$ és $BCR\angle$ szög egyenlő. Röviden: a két Brocard-ponthoz tartozó Brocard-szög egyenlő.

16.4. (S) Vetítsük merőlegesen a háromszög három oldalára valamelyik Brocard-pontot (a 16.2. feladatban szereplő valamelyik pontot). Bizonyítsuk be, hogy az így kapott három pont az eredeti háromszöghöz hasonló háromszöget határoz meg.

16.5. (M) Legyen a hegyesszögű ABC háromszög belsejében felvett Q pont merőleges vetülete az AB, BC, CA oldalon rendre Z, X és Y. Tudjuk, hogy az XYZ háromszög hasonló a BCA háromszöghöz a csúcsok ilyen sorrendjében. Bizonyítsuk be, hogy Q azonos a 16.1. feladatban szereplő ponttal.

16.6. (S) Bizonyítsuk be, hogy ha Q a háromszög egyik Brocard-pontja és X, Y és Z a három oldalra eső merőleges vetülete, akkor Q az XYZ háromszögnek is Brocard-pontja.

16.4. Az izogonális konjugált

16.1. (M) A 11.12. feladat megoldásában a következő állítást bizonyítottuk be:

Adott a P pont az ABC háromszög belsejében. Tükrözzük az A-ból induló belső (vagy külső) szögfelezőre az AP egyenest, a B-ből induló belső szögfelezőre a BP egyenest, végül a C-ből induló belső szögfelezőre a CP egyenest. Bizonyítsuk be, hogy az így kapott három egyenes is egy ponton meg keresztül.

Mi a helyzet, ha P nem a háromszög belsejében van?

Megjegyzés. A három „új” egyenes metszéspontját a P pont *izogonális konjugáltjának* nevezzük.

16.2. (M) Mi az izogonális konjugáltja (l. a 16.1. feladatot) a következő pontoknak:

a) A háromszögbe írható kör középpontja,
b) a háromszög valamelyik oldalához hozzá írható kör középpontja,
c) a háromszög köré írható kör középpontja,
d) a háromszög magasságpontja?

16.3. (M) Legyen P az ABC háromszög egy belső pontja és tekintsük a P pont talpponti háromszögét (l. a 16.1. feladatot). Állítsunk merőlegest az AB és AC oldalon levő talppontokat összekötő szakaszra az A csúcsból, így kapjuk az a' egyenest. Hasonlóan kapjuk a b' és a c' egyenest. Bizonyítsuk be, hogy ez a három egyenes egy ponton megy keresztül.

A témához kapcsolódnak a 6.6., 16.3., G.III.9.4 feladatok.

16.5. Az általános talpponti háromszög

16.1. (M) Egy pontnak (P) valamely háromszög (ABC) oldalegyeneseire való merőleges vetületei ($A_P \in BC$, $PA_P \perp BC$, $B_P \in CA$, $PB_P \perp CA$, $C_P \in AB$, $PC_P \perp AB$) alkotta háromszöget ($A_PB_PC_P$) a pontnak az adott háromszögre vonatkozó *általános talpponti háromszög*ének nevezzük.

Fejezzük ki a minél egyszerűbben a $A_PB_PC_P$ általános talpponti háromszög oldalainak hosszát az ABC háromszög a, b, c oldalainak, körülírt köre R sugarának valamint a $PA_P = x$, $PB_P = y$, $PC_P = z$ távolságoknak a felhasználásával!

16.2. (M) [8] Tekintsük az ABC háromszöget és annak tetszőleges P belső pontját. Legyen $A_1B_1C_1$ a P pontnak az ABC háromszögre vonatkozó általános talpponti háromszöge (lásd a 16.1. feladatot), míg $A_2B_2C_2$ a P-nek az $A_1B_1C_1$ háromszögre vonatkozó általános talpponti háromszöge, végül $A_3B_3C_3$ a P-nek az $A_2B_2C_2$ háromszögre vonatkozó általános talpponti háromszöge. Mutassuk meg, hogy az ABC, $A_3B_3C_3$ háromszögek hasonlóak!

16.3. (S) Jelölje a P pontnak az ABC háromszög AB, AC oldalegyeneseire vonatkozó tükörképét P_C illetve P_B. Vizsgáljuk a P_BP_C egyenesek rendszerét, ha P egy olyan körön mozog, amely koncentrikus az ABC háromszög körülírt körével!

16.4. (M) * Jelölje a P pontnak az ABC háromszög AB, AC oldalegyeneseire vonatkozó tükörképét P_C illetve P_B, az A csúcsnak a P_BP_C egyenesre vonatkozó tükörképét A', az ABC háromszög körülírt körének középpontját O, magasságpontját M.

Milyen kapcsolat van a PO, $AO = R$, AM, $A'M$ szakaszok hossza között?

16.5. (M) * Fejezzük ki az P pont ABC háromszögre vonatkozó általános talpponti háromszögének területét az ABC háromszög t területével, körülírt körének R sugarával és a P pontnak e kör O középpontjától való $OP = \rho$ távolságával!

16.6. A Lemoine-Grebe pont

16.1. (S) Bizonyítandó, hogy a háromszög három szimediánja (lásd a 11.11. feladatot) egy ponton megy keresztül.

Definíció. Az így kapott pontot a háromszög *Lemoine-Grebe pontjának* nevezzük.

16.2. (M) Az ABC háromszög köréírt körének B pontban és C pontban húzott érintője az S pontban metszik egymást. Bizonyítandó, hogy ez az S pont rajta van az A-ból induló szimediánon.

16.3. (M) Bizonyítsuk be, hogy az ABC háromszög BC oldalához antiparalel XY szakaszt a T pontja pontosan akkor felezi, ha rajta van az A-ból induló szimediánon.

16.4. (M) Jelölje L az ABC háromszög Lemoine-Grebe pontját (l. a 16.1. feladatot). Húzzuk meg az L ponton keresztül menő három antiparalelt a három oldallal. Bizonyítsuk be, hogy e három szakasz hat végpontja egy körön van. Mi a kör középpontja?

16.5. (M) * Az ABC háromszög Lemoine-Grebe féle pontján át húzzunk párhuzamost a három oldallal. Bizonyítsuk be, hogy ennek a három egyenesnek az oldalakkal vett hat metszéspontja egy körön van.

16.6. (M) Bizonyítsuk be, hogy mindhárom oldal fölé írható olyan téglalap (lásd a 8.3. feladatot), amelynek a Lemoine-Grebe pont a középpontja.

16.7. (M) Jelölje L az ABC háromszög Lemoine-Grebe pontját (l. a 16.1. feladatot). Tekintsük az L ponton átmenő három antiparalel szakaszt. Ezek végpontjai a 16.4. feladat szerint húrhatszöget alkotnak. Bizonyítsuk be, hogy e húrhatszög minden második csúcsát kiválasztva egy olyan háromszöget kapunk, amely hasonló az eredeti ABC háromszöghöz.

16.8. (MS) Bizonyítsuk be, hogy a háromszög Lemoine-Grebe pontjának az oldalaktól vett távolságai úgy aránylanak egymáshoz, mint a megfelelő oldalak. Vagyis ha d_a és d_b jelöli az a illetve a b oldaltól vett távolságot, akkor $d_a : d_b = a : b$.

16.9. (S) Bizonyítsuk be, hogy a C csúcshoz tartozó szimedián bármely pontjának az oldalaktól vett távolságai úgy aránylanak egymáshoz, mint a közrefogó két oldal.

16.10. (M) Bizonyítsuk be, hogy a C csúcshoz tartozó szimedián a szemközti oldalt a közrefogó oldalak négyzetének arányában osztja.

16.11. (M) Bizonyítsuk be, hogy egy tetszőleges P pontnak az ABC háromszög oldalaitól vett távolságai négyzetösszege pontosan akkor minimális, ha e távolságok aránya megegyezik az oldalak arányával.

Következik-e ebből, hogy e távolságok négyzetösszege a háromszög Lemoine-Grebe pontjára minimális?

16.12. (M) Adott az ABC háromszög. Bizonyítsuk be, hogy csak a Lemoine-Grebe pontra igaz, hogy egyszerre középpontja mindhárom oldal fölé írható téglalapnak.

16.13. (M) Tekintsük az ABC háromszög valamelyik oldalfelező pontját az oldalhoz tartozó magasság felezőpontjával összekötő három szakaszt. Bizonyítsuk be, hogy e három szakasz egy ponton megy át.

16.14. (M) * Bizonyítsuk be, hogy a háromszög Lemoine-Grebe pontja súlypontja a hozzá tartozó általános talpponti háromszögnek (lásd a 16.1. feladatot).

16.15. (M) Adott egy XYZ háromszög. Tükrözzük ezt a háromszöget az S súlypontjára. A tükörképet jelöljük $X'Y'Z'$-vel. Állítsunk merőlegest XX' egyenesre X-ben és X'-ben, YY' egyenesre Y-ban és Y'-ben, végül ZZ' egyenesre Z-ben és Z'-ben. Bizonyítsuk be, hogy e hat egyenes által meghatározott hatszög csúcsai köré egy S középpontú kör írható, továbbá hogy a hatszög szemközti csúcsai téglalapot alkotnak.

16.16. (M) Bizonyítsuk be, hogy az ABC háromszög síkjának pontjai közül csak a Lemoine-Grebe pontra igaz, hogy súlypontja a saját talpponti háromszögének.

16.17. A következő feladatoknál szükségünk lesz az alábbi definícióra:

Definíció. Adott egy ABC háromszög. A háromszög síkjában levő P pontnak a háromszög oldalegyeneseitől vett *előjeles távolságát* úgy számoljuk, hogy a P pont távolsága egy oldaltól pontosan akkor pozitív, ha az oldal a P pontot nem választja el az oldallal szemközti csúcstól.

Tehát a háromszög belsejében mindhárom oldaltól vett távolság pozitív; például az A-ból induló AB-vel és AC-vel ellentétes irányú félegyenesek által határolt szögtartományban e két oldaltól vett távolság negatív, a BC-től vett távolság pedig pozitív.

Bizonyítsuk be, hogy azok a pontok, amelyeknek az AB és AC oldalegyeneseitől vett előjeles távolságának aránya egy adott valós szám, egy olyan, A-ra illeszkedő egyenes, amely „lukas” az A pontban.

16.18. (S) A sík valamely P pontjának az BC és AC oldalegyenesektől vett előjeles távolsága úgy aránylik egymáshoz, mint $x:y$ és az CP egyenes az AB oldalegyenest az U pontban metszi. Mennyi az $AU:UB$ arány?

16.19. (S) Adott az ABC háromszög és három valós szám, x, y, z, egyikük sem nulla.

a) Tekintsük azt az A-n átmenő egyenest, amely pontjainak a b és c oldaltól vett előjeles távolsága úgy aránylik egymáshoz, mint $y:z$, azt a B-n átmenő egyenest, amely pontjainak az a és c oldaltól vett távolságai úgy aránylanak egymáshoz, mint $x:z$, végül azt a C-n átmenő egyenest, amely pontjainak az a és b oldaltól vett távolságai úgy aránylanak egymáshoz, mint $x:y$. Bizonyítsuk be, hogy e három egyenes vagy egy ponton megy keresztül, vagy mindhárom párhuzamos egymással.

Megjegyzés. Előbbi esetben a közös pontra igaz, hogy a három oldalegyenestől (a szokott sorrendben) vett előjeles távolságai úgy aránylanak egymáshoz, mint $x:y:z$.

Ha a sík minden irányához hozzárendelünk egy-egy „ideális pontot” (l. a 16.1. feladat megoldását is), akkor ezt a konvenciót használva azt mondhatjuk, hogy az utóbbi esetben a három egyenes közös irányához tartozó „ideális pont” a három egyenes közös pontja, és erre teljesül az állításunk.

A továbbiakban egy adott ABC háromszög esetén e háromszög síkjának minden, a háromszög oldalegyenesein levő pontoktól különböző – valódi és „ideális” – pontjához hozzárendeljük az oldalaktól vett előjeles távolságainak aránGyhármasát. (Az $x : y : z$ és a $\lambda x : \lambda y : \lambda z$ arány $\lambda \neq 0$ esetén természetesen azonos.) Ha a háromszög oldalegyeneseinek pontjait kizárjuk, akkor minden ilyen arányhármas értelmes. Ez abból következik, hogy ha egy – valós vagy ideális – pont nincs egyik oldalegyenesen sem, akkor a feladat elején definiált három egyenes egyike sem azonos valamelyik oldalegyenessel.

Másrészt ha $xyz \neq 0$, akkor az $x : y : z$ arányhármashoz a fenti egyenesek közös pontját rendelve minden ilyen arányhármashoz rendeltünk egy pontot, éspedig olyan pontot, amelyik nem illeszkedik egyik oldalegyenesre sem.

b) Bizonyítsuk be, hogy különböző arányhármasokhoz különböző pontok tartoznak.

c) Bizonyítsuk be, hogy ha x, y és z is pozitív, akkor az $x : y : z$ arányhármashoz valódi pont, a háromszög egy belső pontja tartozik.

Hogy melyik arányhármasokhoz tartozik „ideális pont”, azt a 16.32. feladat alapján fogjuk jobban látni.

16.20. (S) Adott egy ABC háromszög. Határozzuk meg, hogy a síkjának melyik pontját jellemzik az alábbi arányhármasok:

a) $1 : 1 : 1$,

b) $1 : 1 : -1$,

c) $-1 : -1 : 1$,

d) $1/a : 1/b : 1/c$.

16.21. (S) Adott egy ABC háromszög. Határozzuk meg, hogy a síkjának melyik pontját jellemzi az $a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$ arányhármas.

16.22. (S) Adott egy ABC háromszög. Határozzuk meg, hogy a síkjának melyik pontját jellemzi a $\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma$ arányhármas.

16.23. (S) Adjuk meg a háromszög szögeinek ismeretében, hogy milyen arányhármas tartozik a háromszög magasságpontjához.

16.24. (S) Adott egy ABC háromszög. Határozzuk meg, hogy a síkjának melyik pontját jellemzi

a) az $1/a : 1/b : -1/c$ arányhármas és

b)* az $a : b : -c$ arányhármas.

16.25. (S) Bizonyítsuk be, hogy a P pont akkor és csak akkor az ABC háromszög köréírt körének egy, háromszög csúcsaitól különböző pontja, ha valamely φ konvex, nullától, α-tól és $\alpha+\gamma$-tól különböző szögre igaz, hogy P-hez $-\sin\varphi\sin(\alpha-\varphi) : \sin(\beta+\varphi)\sin\varphi : \sin(\beta+\varphi)\sin(\alpha-\varphi)$ arányhármas tartozik.

16.26. (M) Bizonyítsuk be, hogy az egyetlen olyan pont, amelynek az oldalaktól vett távolságai négyzetösszege minimális, a háromszög Lemoine-Grebe pontja.

16.27. (S) Az ABC háromszög síkjának egy, nem a kerületen levő P pontjához az $x : y : z$ (előjeles) távolságarányhármas tartozik. Milyen arányhármas tartozik az izogonális konjugáltjához?

16.28. (S) Adjunk a 16.27. feladat gondolatmenete alapján új bizonyítást az izogonális konjugált létezését kimondó 16.1. feladat állítására!

16.29. (S) Igaz-e, hogy egy – nem a háromszög oldalegyeneseire illeszkedő – pont izogonális konjugáltjának izogonális konjugáltja maga a pont?

16.30. (M) Adjunk a 16.27. feladat alapján új bizonyítást arra, hogy a Lemoine-Grebe ponthoz az $a : b : c$ arányhármas tartozik, azaz hogy a Lemoine-Grebe pontnak az oldalaktól vett távolságai úgy aránylanak egymáshoz, mint a megfelelő oldalak (l. a 16.8. feladatot).

16.31. (M) Adjunk új bizonyítást a **??**. feladat állítására a 16.27. feladat alapján!

16.32. (M) Adott az ABC háromszög. Bizonyítsuk be, hogy az $x : y : z$ arányhármashoz ($xyz \neq = 0$) pontosan akkor tartozik ideális pont, ha van olyan 0-tól, α-tól és $\alpha+\gamma$-tól különböző konvex φ szög, amelyre ez az arányhármas egyenlő a $-\sin(\beta+\varphi) : \sin(\alpha-\varphi) : \sin\varphi$ arányhármassal.

16.33. (M) Egy PQR háromszöget akkor nevezünk az ABC *háromszögbe írt háromszögnek*, ha a P, Q, R pont rendre a BC, CA, AB oldalra illeszkedik.

Legyen ABC hegyesszögű háromszög és PQR egy olyan, a háromszögbe írt háromszög, amely oldalainak négyzetösszege minimális. Bizonyítsuk be, hogy ekkor a PQR háromszög a Lemoine-Grebe pont talpponti háromszöge.

Megjegyzés. További, a Lemoine-Grebe pont tulajdonságaira vonatkozó tételeket találunk Surányi László *A háromszög kevésbé ismert nevezetes pontjairól* c. cikkében[14].

16.34. (S) Igazoljuk, hogy a ABC háromszög A-ból induló szimediánját a Lemoine-Grebe pont $b^2+c^2 : a^2$ arányban osztja (a, b, c a megfelelő oldalak hosszát jelöli).

16.7. A sík vizsgálata az egyenesről

16.1. (S) Adott az e egyenes és rajta négy pont: A, I, N_A, H_A. Szerkesztendő háromszög, melynek A-ból induló szögfelezője az adott egyenes, rajta I, N_A, H_A rendre a beírt kör középpontja, a BC oldal metszéspontja és a háromszög körülírt körének (A-tól különböző) pontja

16.2. (S) Adott az e egyenes és rajta négy pont: B, T_A, N_A, F_A. Szerkesztendő háromszög, melynek BC oldalegyenes az adott egyenes, rajta T_A, N_A, F_A rendre illeszkedik az A csúcsból induló magasságvonalra, szögfelezőre és súlyvonalra.

16.3. (M) Adott az e egyenes és rajta négy pont: E_A, E_B, E_C és E_D.

a) A négy pont mely elhelyezkedése esetén létezik a síkon olyan $ABCD$ négyzet, amely csúcsainak e egyenesre való merőleges vetületei a megadott pontok (a betűzésnek megfelelően)?

b) Fejezzük ki a négyzet területét a megadott pontok közti távolságok függvényeként!

16.4. (M) Adott az e egyenes és rajta három pont: E_A, E_B és E_C.

a) A három pont mely elhelyezkedése esetén létezik a síkon olyan ABC szabályos háromszög, amely csúcsainak e egyenesre való merőleges vetületei a megadott pontok (a betűzésnek megfelelően)?

b) Fejezzük ki a szabályos háromszög területét a megadott pontok közti távolságok függvényeként!

16.5. (M) Adott az e egyenes és rajta három pont: E_{AB}, E_{BC} és E_{CA}.

a) Szerkesztendő ABC szabályos háromszög, melynek AB, BC, CA oldalegyenesei rendre a megadott pontokban metszik az e egyenest.

b) Kifejezhető-e a szabályos háromszög területe a megadott pontok közti távolságok függvényeként?

16.6. Adott az e egyenes és rajta három pont: E_{AB}, E_{BC} és E_{CA}. Tekintsük mindazon adott körüljárású ABC szabályos háromszögeket, melyek AB, BC, CA oldalegyenesei rendre a megadott pontokban metszik az e egyenest.

a) Mutassuk meg, hogy van egy olyan P pont a síkon, amelyen ezen háromszögek körülírt körei mind átmennek!

b) Tekintsük az e egyenest számegyenesnek, amelyen az E_{AB}, E_{BC}, E_{CA} pontoknak rendre a c, a, b számok felelnek meg. Fejezzük ki ezekkel a P pont e egyenesre való E_P merőleges vetületének megfelelő p számot!

16.7. (M) Adott az e egyenes és rajta négy pont: E_{AB}, E_{BC}, E_{CD} és E_{DA}.

a) Szerkesztendő $ABCD$ négyzet, melynek AB, BC, CD, DA oldalegyenesei rendre a megadott pontokban metszik az e egyenest.

b) Fejezzük ki a négyzet területét a megadott pontok közti távolságok függvényeként!

16.8. A csúsztatva tükrözés geometriája

A körre vonatkozó összefüggések, pl a kerületi szögek tétele természetes módon kapcsolódnak a forgatás tulajdonságaihoz (lásd pl az 5.6., 5.7., 5.1. feladatokat). A csúsztatva tükrözés vizsgálatából is hasonló érdekes összefüggések vezethetők le, amelyek azonban nem a körre vonatkoznak.

16.1. (MS) Legyen τ valamely rögzített t tengelyre való tükrözés és az azzal párhuzamos $\underline{v}$ vektorral való eltolásból álló csúsztatva tükrözés.

Rögzítsünk egy tetszőleges A pontot a síkon. Tekintsük minden A-ra illeszkedő a egyenes esetén az a, $\tau(a)$ egyenesek P_a metszéspontját! Határozzuk meg a P_a pontok halmazát a síkon!

16.2. (MS) Adott egy derékszögű hiperbola középpontja és két – a középpontra nem szimmetrikusan elhelyezkedő – pontja. Szerkesszük meg a hiperbola aszimptotáit!

16.3. Adott a síkon két pont, A és B, valamint egy szög: φ. Határozzuk meg azon P pontok mértani helyét a síkon, amelyekre a $PAB\sphericalangle$, $PBA\sphericalangle$ *irányított szögek*

a) különbsége; **b)** összege

egyenlő 2φ-vel!

16.4. (MS) Adott a síkon három pont: A, Q és Q'. Mi azon P pontok mértani helye a síkon, amelyekre

a) $AQP\sphericalangle \equiv AQ'P\sphericalangle \pmod{180°}$; **b)** $AQP\sphericalangle \equiv PQ'A\sphericalangle \pmod{180°}$?

16.5. (M) Adott a síkon két pont, A és B. Határozzuk meg azon C pontok mértani helyét a síkon, amelyekre az ABC háromszög C-nél levő szögének egyik szögfelezője

a) átmegy az AB szakasz felezőmerőlegesének egy előre rögzített pontján;

b) párhuzamos egy előre rögzített egyenessel.

16.6. (MS) Adott a síkon három pont: A, Q és Q'. Mi azon P pontok mértani helye a síkon, amelyekre az AQP háromszög körülírt körének AP egyenesre tükrözött képe átmegy Q'-n?

16.7. (MS) Adott a síkon három pont: A, Q és Q'. Mi azon P pontok mértani helye a síkon, amelyekre az AQP, $AQ'P$ háromszögek körülírt köre egyenlő sugarú?

16.8. (M) Adott a síkon három pont: A, B és C. Egy derékszögű hiperbola mind a három ponton átmegy.

a) Hol lehet a C pontnak a hiperbola középpontjára tükrözött képe?

b) Hol lehet a hiperbola szimmetriaközéppontja?

16.9. (MS) Mutassuk meg, hogy ha egy derékszögű hiperbola átmegy egy háromszög három csúcsán, akkor a magasságpontján is átmegy!

16.10. (M) Adott a síkon az ABC háromszög. Tekintsük azokat az ABC-vel egybevágó $A'B'C'$ háromszögeket, amelyekre $CA \cap C'A' = A$, $CB \cap C'B' = B$ és amelyekre

a) az ABC, $A'B'C'$ háromszögek körüljárása megegyezik;

b) az ABC, $A'B'C'$ háromszögek körüljárása ellentétes.

Határozzuk meg a C' pontok mértani helyét a síkon!

16.11. (M) Ha M' az ABC háromszög körülírt körének tetszőleges pontja, akkor van olyan $A'B'C'$ háromszög, amely rendelkezik az alábbi négy tulajdonsággal:

– egybevágó ABC-vel,
– ellenkező körüljárású, mint ABC,
– magasságpontja M',
– $A \in A'M'$, $B \in B'M'$, $C \in C'M'$.

16.12. (M) Az ABC háromszög magasságpontja M. Adott a háromszög körülírt körén egy M' pont. Mutassuk meg, hogy van olyan derékszögű hiperbola (vagy merőleges egyenespár), amelynek szimmetriaközéppontja az MM' szakasz M felezőpontja és amelyre illeszkednek az A, B, C, M, M' pontok!

16.13. (MS) Szerkesztendő a sík négy előre adott pontjára illeszkedő derékszögű hiperbola két aszimptotája.

17. FEJEZET
Vegyes feladatok

17.1. A Nagy Szerkesztő egy adott pontból merőlegest szeretne állítani egy adott egyenesre egy hozzá közeli adott pontból, de kedvenc macskája, Kormos, épp a körző dobozán alszik. Hogyan tudja megszerkeszteni a Nagy Szerkesztő a merőlegest egyetlen egyélű vonalzóval és a zsebében talált húszforintossal?

17.2. Fejezzük ki a háromszög α, β, γ szögeivel a háromszög AB oldalának a Feuerbach körrel bezárt szögét!

17.3. **a)** Mutassuk meg, hogy a paralelogramma átlói hosszának négyzetösszege megegyezik a négy oldal hosszának négyzetösszegével!

b) Írjunk fel analóg összefüggést a paralelepipedon oldaléleinek és testátlóinak hossza között!

17.4. Adott a k kör és rajta két pont. Képezzük az ebbe a körbe írt olyan húrtrapézokat, melyeknek két csúcsa a két adott pont. Határozzuk meg e trapézok átlói metszéspontjának mértani helyét!

17.5. (S) [21] Mutassuk meg, hogy ha az $ABCD$ trapéz AB, CD szárain elhelyezkedő K, M pontokra $BAM\angle = CDK\angle$, akkor $BMA\angle = CKD\angle$!

17.6. [21] Egy trapéz szárai, átlói és alapjainak meghosszabbításai egy l egyenest hat pontban metszenek, így öt szakaszt vágnak ki belőle.

a) Mutassuk meg, hogy ha a szélső szakaszok (az 1. és az 5.) egyenlők egymással, akkor azok szomszédai (a 2. és a 4.) is egyenlők egymással!

b) Hogyan aránylanak egymáshoz a trapéz alapjai, ha van olyan l egyenes, amelyen mind az öt szakasz egyenlő hosszú?

17.7. Jelölje m_c, s_c, f_c rendre a háromszög C csúcsából kiinduló magasságvonal, súlyvonal és szögfelező hosszát. Mutassuk meg, hogy

a) $m_c \leq \min(a, b)$ **b)** $s_c \leq \frac{a+b}{2}$ **c)** $f_c \leq \frac{2ab}{a+b}$!

17.8. (S) Van-e olyan háromszög, amelyben a, f_c és b – ilyen sorrendben - mértani sorozatot alkot? (f_c a C csúcsból induló belső szögfelező hosszát jelöli.)

17.9. Mutassuk meg, hogy az A, B pontpár Apollóniusz körei merőlegesek az AB szakasz látóköreire!

17.10. Adott a síkon az A és a B pont határozzuk meg azon pontok mértani helyét a síkon, amelyeknek a két adott ponttól mért távolságai négyzetének

a) különbsége **b)** összege

előre adott állandó.

17.11. „Ceva-szakasz”-nak nevezzük a háromszög csúcsát a szemköztes oldal tetszőleges pontjával összekötő vonaldarabot. Mutassuk meg, hogy bármely hegyesszögű háromszöghöz van olyan pont a térben, ahonnan a háromszög minden Ceva-szakasza derékszögben látszik.

17.12. Tekintsük az ABC háromszög oldalegyeneseit érintő körök közül azt a kettőt, amelyik az AB egyenest A és B között érinti. Bizonyítsuk be, hogy e két kör sugarának mértani közepe nem lehet nagyobb AB felénél!

17.13. Tekintsünk két egymáson kívül elhelyezkedő kört, egyik közös belső és egyik közös külső érintőjüket. Érintési pontjaik mindkétkörben egy-egy húrt határoznak meg. Bizonyítsuk be, hogy-e húrok egyenesei a középpontokat összekötő egyenesen metszik egymást!

17.14. Adottak az egymást metsző e és f egyenesek, továbbá a k kör, amelynek nincsen közös pontja az adott egyenesekkel. Szerkesszük meg azt az f-fel párhuzamos egyenest, amelyen a körből kimetszett húr aránya az e egyenestől a körig tartó szakasszal a legnagyobb!

17.15. Bizonyítsuk be, hogy ha egy húrnégyszög átlóinak M metszéspontja felezi valamely egyenesnek a húrnégyszögön belüli szakaszát, akkor felezi ugyanezen egyenesnek a négyszög körülírt körébe eső húrját is.

17.16. Legyen az ABC háromszög köré írható kör középpontja O, sugara r. Mutassuk meg, hogy

$$\frac{1}{AA'}+\frac{1}{BB'}+\frac{1}{CC'}=\frac{1}{r},$$

ha AO, BO és CO meghosszabbításai a B, O és C, a C, O és A, illetve az A, O és B pontokon átmenő köröket az A', B', C' pontokban metszik.

17.17. Adva van három kör: k_A,k_B és k_C. Keressünk olyan kört, amely k_A-t annak két átellenes pontjában, k_B-t annak két átellenes pontjában és k_C-t is annak két átellenes pontjában metszi.

17.18. Vizsgáljuk az $ABCD$ húrnégyszöget, benne az ABC, BCD, CDA, DAB háromszögeket és azok beírt körei középpontjait! Tegyünk megfigyelést, fogalmazzunk meg állítást!

17.19. Rögzítsük az A pontot és az egymást A-ban merőlegesen metsző b, c egyeneseket! Vizsgáljuk mindazon c egyeneseket, amelyek b-vel és c-vel előre rögzített területű háromszöget fognak közre!

17.20. Határozzuk meg az $y=x^2+2x-3$ egyenletű parabola

a) szimmetriatengelyének **b)** vezéregyenesének

c) $(1;0)$ pontbeli érintőjének egyenletét,

d) valamint fókuszpontjának koordinátáit!

17.21. Az ABC háromszög oldalainak hossza: $AB=28$, $BC=30$, $CA=26$ egység. Határozzuk meg a C csúcsból kiinduló

a) magasságvonal **b)** súlyvonal **c)** belső szögfelező

hosszát!

17.22. (M) Legyen M és N az AB szakasz Thálesz körének két, A-tól és B-től különböző pontja. Jelölje C az NA, D pedig az NB szakasz felezőpontját! A kört az MC egyenes másodszor az E, MD pedig az F pontban metszi. Mekkora az

$$MC\cdot CE+MD\cdot DF$$

kifejezés értéke, ha $AB=2$ egység?

17.23. Bizonyítsuk be, hogy egyenlő szárú háromszög beírt körének sugara (ρ), körülírt körének sugara (r) és a két középpont távolsága d között fennáll a

$$r^2 - d^2 = 2r\rho$$

összefüggés!

17.24. (M) Három, páronként egymáson kívül elhelyezkedő körhöz szerkesszünk olyan pontot, amelyből mindhárom kör ugyanakkora szögben látszik.

17.25. *Apollóniuszi körszerkesztési feladat*
Adottak az e, f egyenesek, valamint a G pont. Szerkesztendő kör, amely érinti e-t és f-et és átmegy P-n, ha e és f metszik egymást és G nem illeszkedik egyikükre sem.

17.26. *Apollóniuszi körszerkesztési feladat*
Adottak az e, f egyenesek, valamint a g kör. Szerkesztendő kör, amely érinti e-t, f-et és g-t is.

17.27. (M) * Jelölje az ABC háromszög A csúcsánál levő szög külső szögfelezőjének a köréírt körrel való második metszéspontját G – ha a külső szögfelező érinti a kört, akkor $G = A$ –, és jelölje F_{BC} a BC oldal felezőpontját. Igazoljuk, hogy a GF_{BC} egyenlő a két hozzáírt kör sugarának átlagával.

17.28. (M) * Jelölje az ABC háromszög A-ból induló belső szögfelezőjének a köréírt körrel való második metszéspontját H. Igazoljuk, hogy az ABC háromszög a oldalához írt körének sugarából levonva a beírt kör sugarát éppen $2HF_{BC}$-t kapunk. (F_{BC} a BC oldal felezőpontja.)

17.29. (S) * Igazoljuk, hogy a háromszög három oldalához írt kör sugarának összege $4R + r$, ahol R a köréírt kör sugara, r a beírt köré. Vagyis a szokásos jelöléssel:
$r_A + r_B + r_C = 4R + r$.

17.30. (M) Jelölje K a háromszög köréírt körének középpontját. Bizonyítsuk be, hogy K-nak a három oldaltól vett – előjeles – távolsága egyenlő a köréírt kör és a beírt kör sugarának összegével.

17.31. (M) Igazoljuk, hogy a háromszög aszerint hegyes-, derék- vagy tompaszögű, hogy oldalainak négyzetösszege nagyobb, mint $8R^2$, egyenlő vele, vagy kisebb nála. Itt R a köréírt kör sugarát jelöli.
Megjegyzés. A derék- és tompaszögű esethez vö. a 9.4. feladatot.

17.32. (M) Az $ABCD$ konvex négyszög átlóinak metszéspontja M. Vetítsük merőlegesen M-et a négyszög négy oldalára. Igazoljuk, hogy ha $ABCD$ húrnégyszög, akkor e négy pont érintőnégyszöget alkot.

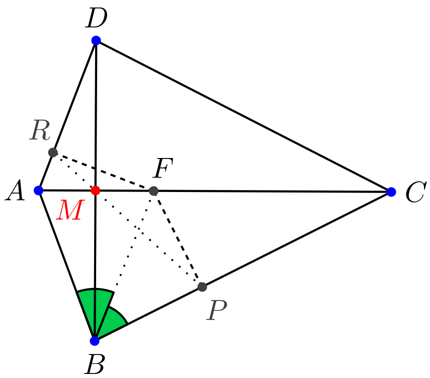
17.33. (M) Adott a $PQRS$ konvex négyszög. Tekintsük azt az $ABCD$ négyszöget, amelynek csúcsai a $PQRS$ négyszög szomszédos csúcsain átmenő külső szögfelezők metszéspontjai. Igazoljuk, hogy ha $PQRS$ érintőnégyszög, akkor $ABCD$ húrnégyszög.

17.34. (S) Az $ABCD$ konvex négyszög átlóinak metszéspontja M. Vetítsük merőlegesen M-et a négyszög négy oldalára. Igazoljuk, hogy e négy pont pontosan akkor alkot érintőnégyszöget, ha $ABCD$ húrnégyszög.

17.35. (S) Adott a $PQRS$ konvex négyszög. Tekintsük azt négyszöget, amelynek csúcsai az $ABCD$ négyszög szomszédos csúcsain átmenő külső szögfelezők metszéspontja. Igazoljuk, hogy ha $ABCD$ pontosan akkor húrnégyszög, ha $PQRS$ érintőnégyszög.

17.36. (M) * Az $ABCD$ konvex négyszög átlóinak metszéspontja M. Adott az M pont merőleges vetülete a négyszög négy oldalán. Szerkesztendő az $ABCD$ négyszög. (Természetesen maga M nincs megadva).

17.37. (M) Az $ABCD$ konvex deltoidnak az AC átló a szimmetriatengelye. Az $ABC\angle$ szög felezője az F pontban metszi az AC átlót. F merőleges vetülete a BC oldalon P, az AD oldalon R (lásd az 1. ábrát). Mely deltoidokra igaz, hogy a PR szakasz átmegy az átlók M metszéspontján?



17.37.1. ábra.

17.38. (MS) Az $ABCD$ trapézba kör írható. Igazoljuk, hogy az átlók metszéspontja rajta van azon a szakaszon, amely a beírt kör és az alapok érintési pontjait köti össze.

17.39. (M) * Adott egy konvex érintőnégyszög. Tekintjük azt a konvex négyszöget, amelyet a beírt körének az oldalakkal vett négy érintési pontja alkot. Bizonyítsuk be, hogy e két négyszög átlóinak metszéspontja egybeesik.

17.40. (M) Igazoljuk, hogy az ABC háromszög három oldalához írt kör középpontját a megfelelő oldal felezőpontjával összekötő három egyenes egy ponton megy át.

17.41. Az ABC háromszögben A-nál derékszög van. Az A-ból induló magasság felezőpontjának a B-ből induló szögfelezőre való metszéspontját összekötjük B-vel. Igazoljuk, hogy a kapott e egyenes felezi az AC szakaszt!

17.42. (M) Adott ABC háromszög AB oldalán szerkesztendő olyan P és AC oldalán olyan Q pont, amelyre $BP = PQ = QC$.

17.43. (M) * Adott egy ABC háromszög. Bizonyítsuk be, hogy pontosan egy olyan P pont van a háromszögben, amelyre igaz, hogy ha P-n keresztül párhuzamost húzunk mindhárom oldallal, akkor ezeknek a (többi) oldallal vett, összesen hat metszépontja húrhatszöget határoz meg.

17.44. (S) Szerkesszünk háromszöget, ha ismerjük a beírt körének sugarát, az egyik csúcsából induló magasság hosszát és a másik két szög különbségét.

17.45. (S) A k körön rögzítünk két pontot, ezek X és Y. Az l és l' kör érinti a k kört az X, illetve az Y pontban. Az l és az l' kör egymást is érinti az E pontban. Mi az E pont mértani helye, ha l és l' kör minden lehetséges helyzetet felvesz?

17.46. (S) Szerkesszünk háromszöget, ha ismerjük két súlyvonalának hosszát és a harmadik csúcsból induló magasságvonal hosszát.

17.47. (S) Jelölje az ABC háromszög A, B, C csúcsából induló magasságvonalak talppontját rendre A', B', C'. Igazoljuk, hogy
$AB' \cdot BC' \cdot CA' = AC' \cdot BA' \cdot CB' = A'B' \cdot B'C' \cdot C'A'$.

17.48. (M) Szerkesztendő a háromszög, ha adott egyik csúcsból induló belső szögfelezője, a másik két csúcsban fekvő szög különbsége és e két csúccsal szemközti oldalak aránya. (Tehát a szokásos jelölésekkel: adott f_α, $\beta - \gamma$ és $b : c$.

17.49. (S) Szerkesztendő a háromszög, ha adott egyik csúcsból induló súlyvonala, a másik két csúcsban fekvő szög különbsége és e két csúccsal szemközti oldalak aránya. (Tehát a szokásos jelölésekkel: adott s_a, $\beta - \gamma$ és $b : c$.

17.50. (M) Egy pontszerű fényforrást kell gömbökkel eltakarnunk. A gömbök nem tartalmazhatják a fényforrást, nem nyúlhatnak egymásba, a fényforrásból a gömbhöz húzott érintők mentén már kijut a fény. Az a cél, hogy a fényforrástól száz méterre már ne jusson ki fény. Legkevesebb hány gömbre van szükségünk ehhez?

17.51. (M) * Münchhausen báró azt állítja, hogy a kertjében minden nyírfától pontosan 10 méterre legalább 100 nyárfa áll, mégis több nyírfája van, mint nyárfája. Lehetséges-e, hogy a báró ez alkalommal nem lódít? A fákat pontszerűnek tekinthetjük.

17.52. (S) A kör egy M pontjából kiinduló MA, MB, MC húrok mint átmérők fölé köröket rajzolunk. Ezek a körök másodszor az X, Y, Z pontokban metszik egymást. Bizonyítsuk be, hogy e három pont egy egyenesen van.

17.53. (M) * Adott egy k kör és rajta kívül két pont, A és B. Szerkesztendő a K körnek az az AB-vel párhuzamos CD húrja, amelyre igaz, hogy az AC és a BD egyenes a k körön metszi egymást.

17.54. (M) Egy konvex négyszög húrnégyszög és érintőnégyszög is. Bizonyítsuk be, hogy ekkor területének négyzete az oldalak szorzatával egyenlő.

17.55. (S) Adott ABC háromszögben szerkesszük meg az AB oldal D pontját és az AC oldal E pontját úgy, hogy a DE szakasz párhuzamos legyen a BC oldallal és fennáljon a $BD+EC = DE$ egyenlőség.

17.56. (S) Az egységsugarú gömb felszínén adott n pont. Bizonyítandó, hogy a gömb felszínén van olyan P pont, amelynek az n ponttól vett távolságai összege nagyobb n-nél.

17.57. (M) * Adott a síkon két pont, A és B. Mi azoknak a C pontoknak a mértani helye, amelyekre az ABC háromszög B csúcshoz tartozó magassága ugyanolyan hosszú, mint az A csúcshoz tartozó súlyvonala?

17.58. (M) Adott a síkon egy O és egy R pont, továbbá egy α irányított szög. Szerkesztendő azon P pontok mértani helye, amelyekre igaz, hogy ha P-t α szöggel elforgatjuk O körül, akkor a kapott P' pontra $RP = PP'$.

17.59. (M) Egy háromszög beírt köre a háromszög egyik súlyvonalát három olyan szakaszra osztja, amelyekre igaz, hogy a körön kívüli szakaszok egyenlő hosszúak. Bizonyítandó, hogy a háromszögnek van két oldala, amelyek aránya 1:2.

Igaz-e az állítás megfordítása is?

17.60. (M) * Az ABC háromszög legrövidebb oldala BC. A P pont az AB oldalnak az a pontja, amelyre $PCA\angle = BAC\angle$ és az R pont az AC oldalnak az a pontja, amelyre $RBA\angle = BAC\angle$. Bizonyítsuk be, hogy az ABC és az APR háromszögek köré írt körének középpontjait összekötő szakasz merőleges a BC oldalra.

17.61. (S) Adott ABC háromszögben szerkesszük meg az AB oldal D pontját és az AC oldal E pontját úgy, hogy a DE szakasz párhuzamos legyen a BC oldallal és fennáljon a $BD+EC = DE$ egyenlőség.

17.62. (S) Az egységsugarú gömb felszínén adott n pont. Bizonyítandó, hogy a gömb felszínén van olyan P pont, amelynek az n ponttól vett távolságai összege nagyobb n-nél.

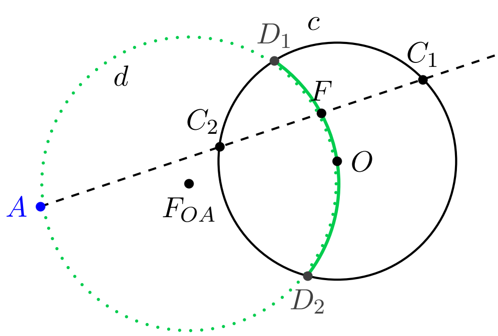
17.63. (MS) * Adott egy kör és benne az egymást nem metsző AB és CD húr. Az utóbbit nem tartalmazó AB köríven fut a P pont, CP és AB metszéspontja X, DP és AB metszéspontja Y. Szerkesszük meg P-nek azt a helyzetét, ahol az XY szakasz hossza maximális.

Segítség, útmutatás

1. Bevezetés

1.10. Lásd az 1.9. feladatot!

1.2. Dinamikus geometriai szerkesztőprogrammal kezdhetjük így:
1. Vegyünk fel három pontot (A, O, C);
2. Vegyük fel az O középpontú C-n átmenő c kört;
3. Vegyünk fel egy C-től különböző pontot c-n $(C_1 \neq C)$;
4. Húzzuk meg az $a = AC_1$ egyenest;
5. Tekintsük az $a \cap c = \{C_1, C_2\}$ metszéspontokat;
6. Képezzük a C_1C_2 pontpár (esetleg létre kell hozni a C_1C_2 szakaszt) szakasz F felezőpontját.
7. Rajzoltassuk ki az F pont m mértani helyét (a C_1 pont befutja a c kört)!
8. Mozgassuk az A pontot; vigyük a kör belsejébe is;
9. Vizsgáljuk m-et, sejtsük meg milyen ismert alakzat az m mértani hely;
10. Rajzoljuk ki a sejtésünknek megfelelő görbét,
11. Mozgassuk A-t is, „szemmel” ellenőrizzük sejtésünk helyességét (lásd az 1. ábrát).



1.2S.1. ábra.

12. Bizonyítsuk be a sejtést!

2. Háromszög adatai az oldalak függvényében

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

3. Egybevágóságok

3.1. Vizsgáljuk az AOP, BOP háromszögeket, ahol O az adott szög csúcsa!

3.2. **i)** Legyen x képe x'. Írjuk fel, algebrailag azt a geometriai tényt, hogy szakaszuk felezőpontja a!

3.5. m–o) Először tanuljunk meg tükrözni az $x = -y$ egyenesre.

3.1. Lásd a 3.3. feladatot!

3.2. Lásd a 3.4. feladatot!

3.3. Lásd a 3.5. feladatot!

3.4. Lásd a 3.3. feladatot!

3.5. Lásd a 3.8. feladatot.

3.9. Mutassuk meg, hogy a b) esetnek a két adott pontot összekötő egyenes és az azzal párhuzamos bármelyik egyenes felel meg, a c) esetben a két pontot összekötő szakasz felezőpontján átmenő egyenesek jók, míg az a) esetben az előző két típus bármelyike megfelelő.

3.11. Lásd a 3.3. feladatot!

3.13. Tükrözzük a trapézt egyik szárának felezőpontjára! Próbáljuk megszerkeszteni a trapéz és a képe alkotta paralelogrammát!

3.1. Vizsgáljuk a P_BAP_C egyenlő szárú háromszöget!

3.2. Hozzuk létre a négyszöget az eredeti ábrán, a téglalaphoz kapcsolva!

3.4. Bármelyik körnek az adott egyenessel párhuzamos eltolása alapvetően nem módosítja a feladatot. Alkalmazzuk olyan eltolást, amelytől egyszerűbb lesz a feladat!

3.5. Induljunk ki a kész ábrából és alkalmazzunk rá csúsztatva tükrözés, melynek tengelye $e_A = BC$, vektora az a hosszúságú $\overrightarrow{BC}$ vektor.

3.2. Legyen P' a P pont d-re vonatkozó tükörképe. Mutassuk meg, hogy $PD = P'D$ és ennek alapján becsüljük a $PD + DQ$ összeget!

3.3. Legyen P' a P pont OA egyenesre vonatkozó tükörképe. Mutassuk meg, hogy $PA = P'A$ és ennek alapján becsüljük a $PA + AB$ összeget!

3.4. Legyen P' illetve $P"$ a P pontnak az a szár egyenesére illetve a b szár egyenesére vonatkozó tükörképe. Mutassuk meg, hogy $PA = P'A$, $PB = P"B$ és ennek alapján becsüljük a $PA + AB + BP$ összeget!

3.5. Legyen $P \in BC$ tetszőleges pont és P' illetve $P"$ a P pont BA illetve AC egyenesre vonatkozó tükörképe. Mutassuk meg, hogy a $P'CP"$ háromszög a P választásától függetlenül mindig egyenlő szárú és a $P'AP"\angle$ szög nagysága is független P-től!

3.8. Gondoljuk át újra a 3.5M. feladatmegoldást. Mi lenne, ha nem a P_A pontból indulnánk ki, hanem pl P_B-ből?

Gondolni kell a tompaszögű háromszög esetére is (lásd az 1.6., 1.7. feladatokat).

3.1. a)–c) A háromszög az oldalfelezőpontjára tükrözött képével együtt paralelogrammát alkot. Szerkesszük meg ezt a paralelogrammát!

d) Ez a gondolat alkalmazható a súlypont és két csúcs alkotta háromszögre is.

3.2. Lásd a 3.6. feladatot.

3.3. Több esetet kell megkülönböztetnünk aszerint, hogy melyik két csúcs illeszkedik az adott egyenesekre. Mindegyik esetben gondoljuk végig, hogy ha az egyik csúcs befutja az egyik adott egyenes pontjait, akkor hol helyezkedne el a négyzet többi csúcsa, ha a négyzet

a) középpontja; **b)** egyik csúcsa

a megadot pont lenne.

3.4. Az M pontot tükrözzük a BC felezőmerőlegesére és a képet toljuk el a $\overrightarrow{BA}$ vektorral. A kapott N pontra az $ANDM$ négyszög területe $\frac{t}{2}$, oldalai az MA, MB, MC, MD szakaszokkal egyenlők, de kedvezőbb sorrendben.

4. Egybevágósági transzformációk kompozíciója

4.12. a) Használjuk a 3.8. feladat eredményét!

b) Kövessük nyomon az egyik – pl a T_C – pont útját! Gondoljunk a tompaszögű háromszög esetére is!

5. Kerületi szögek I.

5.2. a) Alkalmazzuk Thalesz tételét!

b) Szerkesszük meg az ábrát!

5.3. a) Vizsgáljuk a $B'H_A$, AC egyeneseket!

5.4. Rajzoljuk be a k kör A, B, C, D, P pontokhoz húzott sugarait és számoljunk az egyenlő szárú háromszögek szögeivel!

5.8. Rajzoljuk be a körnek a húrnégyszög csúcsaihoz húzott sugarait és számoljunk az egyenlő szárú háromszögek szögeivel!

Figyelem! A gondolatmenet némiképp különbözik abban az esetben, amikor a körülírt kör középpontja a négyszögön belül helyezkedik el attól, amikor kívül. Gondoljunk mind a két lehetőségre!

5.5. Tekintsük az AP és BP félegyenes közül azt, amelyik elmetszi még egyszer a látókörívet és tekintsük ezt a metszéspontot. A háromszög külső szögre vonatkozó állításából a feladat állítása következik.

5.6. Az ABC háromszög BC oldalának F_{BC} felezőpontjára tükrözzük A-t, az így kapott pontot jelöljük A'-vel. Az A-nál fekvő szög és az A-ból induló súlyonal ismeretében az ABA' háromszögben ismerjük az $AA' = 2s_a$ oldalt, a másik két oldal összegét és a B-nél fekvő szöget, ami $180° - \alpha$.

Ha az AB félegyenes B-n túli meghosszabbítására felmérjük a $BC = BA' = BD$ szakaszt, akkor az $AA'D$ háromszögben ismerjük két oldal, AA' és $AD = b + c$ hosszát, valamint a D-nél fekvő $90° - \alpha/2$ szöget, tehát a háromszög szerkeszthető.

A megoldások száma (1 vagy 2) attól függ, hogy $2s_a$ és $b + c$ hossza közül melyik a nagyobb.

5.10. Keressünk az ábrán Thalesz-kört!

5.11. Az első ábrán a vizsgált α szög egy háromszög külső szöge. Határozzuk me a háromszög szögeit!

A második ábrán kössük össze az egyik ív végpontját a másik ív megfelelő végpontjával, hogy háromszög jöjjön létre. Határozzuk meg a háromszög szögeit!

6. Kerületi szögek II.

6.2.

1. segítség, útmutatás. Mit tudunk a BCB' háromszögről? Határozzuk meg a szögeit!

2. segítség, útmutatás. Mi adott az $AB'B$ háromszögben?

6.2.

1. segítség, útmutatás. Vizsgáljuk az L_ABK, L_ABL_B háromszögeket. Az előbbivel kapcsolatos a 6.1. feladat is.

2. segítség, útmutatás. Lásd a 6.1. feladat a) részének állítását.

6.5. Számoljunk a szögekkel, keressünk egymással egyenlőket!

6.9. Keressük egymáshoz hasonló háromszögeket, amelyek egy-egy oldala H_AB illetve IA másik odaluk pedig kifejezhető az előírt mennyiségekkel!

6.12. Alkalmazzuk a 6.5. b) feladat eredményét!

6.14. A 6.11M. megoldás a) részében információt találunk az egy csúcsból kiinduló magasság, szögfelező és a körülírt kör sugarának elrendeződéséről.

6.4. Mutassuk meg, hogy az ABC, DBA háromszögek hasonlóak!

6.1. Az IN_BA, IN_CA háromszögekben mi közös? Hogyan lehetnek *nem* egybevágóak?

6.3. Azt az esetet tekintjük, amikor P „kívül” van a háromszögön, Q belül. Jelölje K az APQ háromszög köré írt kör középpontját. $APQ\angle = BCA\angle$ (kerületi szögek), tehát $PQA\angle = ABC\angle$. Ezért $PKA\angle$ középponti szög $2AQP\angle = 2ABC\angle$ és $KAP\angle = 90° - ABC\angle$. A többi eset hasonlóan intézhető el.

6.4. Legyen AM és k_2 másik metszéspontja D. Mutassuk meg, hogy $ABDC$ paralelogramma.

6.7. Húzzuk meg a „kilógó” íveknek a megfelelő oldallal párhuzamos érintőit. A kapott érintőnégyszöget a kör a $PQRS$ négyszögben érinti. A feladat feltételéből következik, hogy a rövidebb PQ és RS ív hosszának összege egyenlő a rövidebb QR és PS ív hosszának összegével. Ebből viszont következik, hogy – O-val jelölve a kör sugarát – például $POQ\angle + ROS\angle = 180°$. De akkor az eredeti négyszög P és Q „között” levő A csúcsára, valamint R és S között levő C csúcsára is igaz, hogy $PAQ\angle + RCS\angle = 180°$. (Ugyanis OP, OQ, OR és OS merőleges az eredeti négyszög megfelelő oldalára.)

6.10. **c)** Mutassuk meg, hogy $D_1B = AB_1$ és $D_2B = AB_2$.

6.11. Jelölje az O_1C egyenes és k_1 másik metszéspontját C_1, O_1C és E_AE_B metszéspontját T. Mutassuk meg, hogy a C_1BC, E_BTC háromszögek hasonlóak!

6.12. **a)** Keressük a csúcsokat a megfelelő látókörökön!
b) Lásd a 6.3. feladatot!

6.13. Lásd a 6.12. feladatot!

6.14. Tükrözzük a szerkesztendő $ABCD$ négyszög C csúcsát az AB oldal F_{AB} felezőpontjára, a kapott pont C'. A DBC' háromszögben ismerjük a DB és $BC' = AC$ oldalt (a négyszög két átlóját), valamint a DBC' szöget (a két átló szögét). DB fölötti $DAB\angle$ szögű és BC' fölötti $BAC'\angle = ABC\angle$ szögű látókörív B-től különböző metszéspontja – ha van – A. C' F_{AB}-re való tükörképe C. Ha a két látókörívnek nincs metszéspontja, nincs megoldás.

6.15. Ha a szerkesztendő $ABCD$ négyszögben az A-nál és C-nél fekvő szögek adottak, akkor ehhez a két csúcshoz felvehetünk egy-egy BD-re írt látókört. Az $\overrightarrow{AC}$ vektor iránya és hossza is adott, így az A-ra írt látókör $\overrightarrow{AC}$ vektorral való eltoltjának a másik látókörrel való metszépontja lesz C.

6.16. Ismeretes, hogy a kerületi szög szögfelezője és a szemközti húr felezőmerőlegese a körülírt körön metszi egymást. Jelen esetben tehát B_1B_2 és C_1C_2 felezőmerőlegese is M-en megy át.

7. A terület

7.1. Tekintsük a beírt kör középpontja és két-két csúcs által meghatározott kisebb háromszögeket!

7.2. Vizsgáljuk az ABI_A, BCI_A, CAI_A háromszögeket, ahol I_a a hozzáírt kör középpontját, A, B, C pedig a háromszög csúcsait jelöli!

7.4. Hozzuk kapcsolatba a két oldalt a háromszög területével!

7.2. Először határozzuk meg a területek arányát! Hasonlítsuk össze az alábbi háromszögek területét: APB_1 és B_1CP, majd CA_1P és A_1PB, ezután ACA_1 és A_1AB, végül BCB_1 és B_1BA.

Ezután járjunk el a G.I.6.2-G.I.6.3. feladatok megoldásának mintájára.

Ha készen vagyunk a területekkel, akkor a B_1PC, CPB háromszögek területét is összehasonlíthatjuk, amely elvezethet a B_1P, PB szakaszok hosszának arányához.

7.3. Lásd a 7.2. feladat megoldását!

7.5. Alkalmazzuk a 7.4. feladat eredményét!

7.6. A Ceva-tételben (a 7.5. feladatban) szereplő arányok mindegyike 1.

7.7. A szögfelező-tétel szerint a Ceva-tételben (a 7.5. feladatban) szereplő arányok rendre $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{c}$ és $\frac{c}{a}$.

7.9. A Ceva-tételben (l. a 7.5. feladatot) szereplő arányok rendre $\frac{s-a}{s-b}$, $\frac{s-b}{s-c}$ és $\frac{s-c}{s-a}$.

7.10. A Ceva-tételben (l. a 7.5. feladatot) szereplő arányok megfordulnak 7.9. feladatban szereplő arányokhoz képest.

7.11. Egyszerű következménye Ceva tételének, csak az ott szereplő arányok mindegyike „megfordul”.

7.14. A Ceva-tételben szereplő arányok rendre $\frac{a^2}{b^2}$ $\frac{b^2}{c^2}$ és $\frac{c^2}{a^2}$, s ezek szorzata 1.

7.15. Lásd a 7.3. feladatot!

8. Középpontos nagyítás

8.2.

1. segítség, útmutatás. Legyen P a kitűzött pont a szög a szárán A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 tetszőleges pontok. Szerkesszük meg a B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 pontokat úgy, hogy a PB_i $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ szakasz felezőpontja az A_i pont legyen. Hol helyezkednek el ezek a B_i pontok?

2. segítség, útmutatás. Lásd a 3.3. feladatot!

8.2.

1. segítség, útmutatás. Lásd a 8.1. feladatot!

2. segítség, útmutatás. Külön igazoljuk, hogy az átlók metszéspontja egy egyenesen van az alapok felezőpontjaival, majd azt, hogy a szárak meghosszabbításainak metszéspontja is illeszkedik az alapok felezőpontjait összekötő egyenesre.

8.3. Használjuk a 8.2. feladat eredményét!

8.4. Használjuk a 8.2. feladat eredményét!

8.2.

1. segítség, útmutatás. Vizsgáljuk az elfajuló eseteket!

2. segítség, útmutatás. Vizsgáljuk először a téglalap AB oldallal párhuzamos, de nem az AB-re eső oldala felezőpontjának mértani helyét!

8.1. A D-beli érintő messe az AC, BC oldalakat A'-ben illetve B'-ben. Hasonlítsuk össze az ABC, $A'B'C$ háromszögeket!

8.2. Hasonlítsuk össze a körülírt kör A_2, B_2, C_2-beli érintői által határolt háromszöget az ABC háromszöggel!

8.3. A C pont a k_1, k_2 körök egyik hasonlósági középpontja.

8.4. Lásd a 8.3-8.3. feladatokat.

8.5. Vizsgáljuk az alakzatok képét annál a nagyításnál, amely k_1-et k_2-be viszi!

8.1. Vizsgáljuk külön az alábbi eseteket!

- $O_1 \equiv O_2$;
- $O_1 \not\equiv O_2$ és $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1$;
- $O_1 \not\equiv O_2$ és $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \neq 1$.

Mutassuk meg, hogy az utóbbi esetben a kompozíció is középpontos nagyítás, amelynek középpontja az O_1O_2 egyenesen van, aránya pedig $\lambda_1 \cdot \lambda_2$.

8.2.

1. segítség, útmutatás. Lásd a 8.1. feladatot!

2. segítség, útmutatás. Lépjünk ki a térbe! Rakjunk minden körközéppontja fölé merőlegesen a kör sugarával egyenlő távolságra egy-egy pontot. Hogyan kaphatók meg ezen pontok segítségével a páronkénti hasonlósági középpontok?

8.6. Keressük meg a K, L, m körök páronkénti hasonlósági pontjait!

8.7. Keressük meg a k_A, k, i körök páronkénti hasonlósági pontjait, ahol i az ABC hátomszög beírt köre!

8.8. Keressük meg a c_A, ω, i körök páronkénti hasonlósági pontjait, ahol i az ABC hátomszög beírt köre!

9. Egyenlőtlenségek

9.3. A súlyvonalak milyen arányban osztják egymást? A $BSCS_A$ négyszögről mi állítható?
Dolgozhatunk vektorokkal is! Pl mi állítható a $\overrightarrow{F_{TC}S}$, $\overrightarrow{AC}$ vektorokról?

9.1. Vonjunk le mindkét oldalból $a^4+b^4+c^4$-et és alakítsunk szorzattá! Emlékezzünk vissza a Heron képletre!

9.2. Lásd a 9.1. feladatot!

9.3. Igazoljuk a $0 \leq (a+b-c)(a-b+c) \leq a^2$ összefüggést vagy használjuk a Heron képletet!

9.6. A 9.4. feladat alapján – a 9.5. feladat megoldásához hasonlóan – most is azt kapjuk, hogy a szabályos háromszög kerülete a legnagyobb.

9.1. A 9.4. feladat egyenlőtlenségében T helyére sr-et írunk.

9.2. A 9.1. feladat alapján azt kapjuk, hogy a szabályos háromszögé.

Megjegyzés. Nyilvánvaló, hogy legkisebb sugarú háromszög nincsen, hiszen adott kerület esetén a beírt kör akármilyen kicsi lehet. Példa egy olyan egyenlőszárú háromszög, amelynek szárszöge „majdnem” egyenesszög.

9.3. A 9.1. feladat alapján azt kapjuk, hogy a szabályos háromszögé.

Megjegyzés. Nyilvánvaló, hogy legnagyobb kerületű nincsen. Itt is, mint a 9.2. feladatban, példa erre egy „majdnem” egyenesszögű egyenlőszárú háromszög.

9.5. Használjuk a 9.5. feladatot és a súlyvonalak és az oldalak négyzetösszege között fennálló összefüggést.

9.6. A súlyvonalra vonatkozó feladatoknál gyakori ötletet használjuk: tükrözzük a c oldallal szemközti csúcsot a c oldal felezőpontjára. A kapott paralelogramma átlóinak hossza c és $2s_c$. Ha c-vel szemben derékszög van, a két átló egyenlő hosszú. Különben az a nagyobb, amelyikkel szemközt nagyobb szög van.

Megjegyzés. Az állítás kijön számolással is. A c oldalhoz tartozó súlyvonal hosszának négyzete $(2a^2+2b^2-c^2)/4$, s ez attól függően nagyobb, egyenlő vagy kisebb, mint $c^2/4$, hogy c-vel szemben hegyes-, derék- vagy tompaszög van (l. a 9.1. feladatot).

9.8. Az állítás következik a 9.5. feladatból a számtani és négyzetes közép közötti egyenlőtlenségből.

9.9. Az állítás következik a 9.10. feladatból.

9.10. Használjuk a számtani és harmonikus közép közötti összefüggést és azt, hogy a magasságvonalak reciprokösszege a beírt kör reciprokával egyenlő.

9.11. Egy magasságvonal hossza legfeljebb akkora, mint az ugyanabból csúcsból futó súlyvonalé.

9.12. A középső egyenlőtlenség nyilvánvaló. A magasságvonalak szorzatára vonatkozó egyenlőtlenség a mértani és harmonikus közép közötti egyenlőtlenségből következik, felhasználva, hogy a magasságvonalak reciprokösszege éppen a beírt kör sugarával egyenlő. A súlyvonalakra vonatkozó egyenlőtlenség a mértani és számtani közép közötti egyenlőtlenségből következik a 9.8. feladat alapján.

10. Az Apollóniusz probléma I.

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

11. Kör és pont

11.3. A 11.1.-ben említett négy eset mindegyikében igaz, hogy az $AXY\angle$ *irányított* szög egyenlő az $BCA\angle$ irányított szöggel. Ebből pedig az állítás mind a négy esetben következik. Két esetben a kerületi szögekre vonatkozó tételből, két esetben pedig abból, hogy egy négyszög akkor és csak akkor húrnégyszög, ha egyik csúcsánál levő belső szöge egyenlő a szemközti csúcsnál levő külső szöggel.

11.6. A feladat a 11.2. feladat egyszerű következménye.

11.8. Ez a feladat egyszerű átfogalmazása a 11.7. feladatnak. Csak azt kell tekintetbe venni, hogy a Feuerbach kör sugara a köréírt kör sugarának fele.

11.1. Keressünk egyenlő szögeket, hasonló háromszögeket!

11.4. Alkalmazzuk az érintő szárú kerületi szögek tételét!

11.1.

1. segítség, útmutatás. Vizsgáljuk a beírt kör középpontjának hatványát a körülírt körre!

2. segítség, útmutatás. Invertáljuk a beírt kört a körülírt körre!

11.4. Vizsgáljuk mely X pontokra állandó a $\frac{CX}{A_1X}$ tört értéke!

12. A sík hasonlósági transzformációi

12.1. Lásd a 6.1. feladatot.

12.4. Lásd a 12.3. feladat megoldását!

12.5. **a)** Használjuk ki, hogy az F alakzatban az A pontot az alakzat bármely másik pontjába egy O körüli forgatva nyújtás képezi.

b) Ehhez hasonlóan, az F alakzat bármely O-n át nem menő a egyenesét bármely másik O-n át nem menő egyenesébe egy O körüli forgatva nyújtás viszi.

12.1.

1. segítség, útmutatás. Próbáljuk egy egyenesen egymás mögé fűzni a PB, PC szakaszokat!

2. segítség, útmutatás. Ha a C csúcs körül (megfelelő irányban) $60°$-kal elforgatjuk B-t, akkor A-t kapjuk. Mi történik ennél a forgatásnál P-vel?

12.2.

1. segítség, útmutatás. Lásd a 12.1. feladatot! Próbáljuk PA-ra másolni a PB szakaszt!

2. segítség, útmutatás. A C körüli megfelelő irányú $90°$-os forgatás a B pontot A-ba viszi. Hová kerül ilyenkor a P pont?

12.7. Próbáljuk egy egyenesen egymás mögé fűzni a PB, PC szakaszokat!

13. Parabola, ellipszis, hiperbola

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

14. Térgeometria

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

15. Axiomatikus térgeometria

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

16. Speciális témák

16.2. Az érintőszögekre vonatkozó tétel megfordítása szerint ez a Q pont rajta van a 16.1. feladatban szereplő mindhárom körön. Tehát e három kör egyetlen közös pontjáról van szó.

Ugyanígy: az R pont rajta van, a megoldásban szereplő másik három körön.

16.3. Bizonyítsuk be, hogy a Q pont izogonális konjugáltja (lásd a 16.1. feladatot) éppen az R pont.

16.4. Ha a három merőleges vetületet forgatva nyújtjuk a Brocard-pont körül $90° - \varphi$-vel és $1/cos\varphi$ arányban, épp az eredeti háromszöget kapjuk.

16.6. A 16.5. feladat megoldásából ez könnyen kiolvasható.

16.3. Alkalmazzunk dinamikus geometriai szoftvert!

16.1. A feladat állítása következik a 16.1. feladatból. L. a 11.12. feladat megoldását is.

16.8. Húzzuk meg az AB-hez antiparalel PQ szakaszt az L ponton keresztül, P van a CA oldalon, Q van az CB oldalon. Ekkor L távolsága az CA oldaltól $LP \sin\beta$, az CB oldaltól $LQ \sin\alpha$. Itt $LP = LQ$, mert L felezi az antiparalelt. Innen színusz-tétellel adódik a feladat állítása.

16.9. Ez a C középpontú középpontos hasonlóságból következik a 16.8. feladat alapján.

16.18. Két színusz-tételből: $AU : UB = x \sin\alpha : y \sin\beta$. L. a 16.9. és 16.10. feladatot is.

16.19. a) Ha például az első két egyenesnek van közös pontja, akkor ennek a pontnak az a és b oldalegyenestől vett előjeles távolságai úgy aránylanak egymáshoz, mint $x/z : y/z = x : y$, tehát ez a pont rajta van a harmadik egyenesen is. Ugyanígy bizonyítható, hogy ha valamelyik két egyenes metszi egymást, akkor a metszéspontjukban a harmadik oldalpárnak megfelelő arány is fennáll, tehát a harmadik egyenesen is rajta van a metszéspont.

b) Ha az $x : y : z$ arányhármas különbözik az $x' : y' : z'$ arányhármastól, akkor a két arányhármashoz tartozó három-három egyenes közül legalább egy megfelelő pár különbözni fog. Tehát a három egyenes közös pontja sem lehet azonos a két arányhármas esetén.

c) Ha x, y, z pozitív, akkor mindhárom egyenes áthalad a háromszög belsején, tehát metszik egymást.

16.20. a) A beírt kör középpontja. b) és c) az AB oldalhoz írt érintő kör középpontja. d) Ez az arányhármas így is írható: $m_a : m_b : m_c$, így a súlypontot kapjuk.

16.21. A 16.8. feladatban láttuk, hogy a Lemoine-Grebe pontnak az oldalegyenesektől vett távolságaránya éppen $a : b : c$. Valójában ott ezt nem az *előjeles* távolságokra láttuk, tehát itt még meg kell gondolni azt is, hogy a Lemoine-Grebe pont minden esetben a háromszög belsejében van.

16.22. Ez a pont a köréírt kör középpontja.

16.23. A magasságpontnak az a oldaltól vett távolsága $b\cos\gamma\cot\beta = 2R\cos\gamma\cos\beta$. Tehát a magasságponthoz tartozó arányhármas:

$\cos\beta\cos\gamma : \cos\alpha\cos\gamma : \cos\alpha\cos\beta = 1/\cos\alpha : 1/\cos\beta : 1/\cos\gamma$.

16.24. Az első arányhármas megegyezik az $m_a : m_b : -m_c$ arányhármassal. Ehhez tehát olyan pont tartozik, amelyik rajta van a C csúcshoz tartozó súlyvonalon. A C csúcsnak az AB oldal felezőpontjára vonatkozó tükörképe a megfelelő pont.

A második arányhármashoz a 16.2. feladatban szereplő S pont tartozik.

16.25. A „nagy” színusz-tétel többszöri alkalmazásával kiszámolható, hogy ha az A csúccsal szemközti íven van a P pont, akkor az oldalaktól vett távolságai rendre $-2R\sin\varphi\sin(\alpha-\varphi)$, $2R\sin(\beta+\varphi)\sin\varphi$ és $2R\sin(\beta+\varphi)\sin(\alpha-\varphi)$, ahol φ az CP ívhez tartozó kerületi szög.

16.27. Ha egy, az A csúcson átmenő egyenes pontjainak a b és c oldaltól vett előjeles távolságai úgy aránylanak egymáshoz, mint $x : y$, akkor ennek az egyenesnek a szögfelezőre vett tükörképén levő pontokra ez az arány $y : x = 1/x : 1/y$. Tehát az izogonális konjugálthoz tartozó arányhármas $1/x : 1/y : 1/z$.

A **??**. feladat alapján elmondhatjuk, hogy ez igaz akkor is, ha az izogonális konjugált ideális pont, vagy ha az eredeti pont ideális pont.

16.28. Használjuk most is a 16.27. feladat megoldásának elején mondottakat, valamint azt, hogy ha a C-n átmenő, $u : v$ arányhoz tartozó egyenesnek és az A-n átmenő, $v : w$ arányhoz tartozó egyenesek metszik egymást, akkor metszéspontjukon átmegy a B-n átmenő, $u : w$ arányhoz tartozó egyenes is.

16.29. Ha egy pont nem a háromszög oldalegyenesein van, akkor egyértelműen tartozik hozzá egy $x : y : z$ arányhármas, amelyre $xyz \neq 0$. Tehát az $1/x : 1/y : 1/z$ arányhármas értelmes és a hozzátartozó pont éppen a pont izogonális konjugáltja.

16.34. A 16.10. feladat szerint a szimedián a szemközti oldalt a közrefogó oldalak négyzetének arányában osztja. Ebből következik, hogy például az A csúcsból az L Lemoine-Grebe pontba mutató vektor $(b^2\overrightarrow{AB}+c^2\overrightarrow{AC})/(a^2+b^2+c^2)$, míg a szimediánnak és a szemközti BC oldalnak T metszéstpontjába mutató vektor $(b^2\overrightarrow{AB}+c^2\overrightarrow{AC})/(a^2+b^2)$.

16.1. A megadott pontok közti távolságra algebrai összefüggésnek kell teljesülnie:

$$AN_A \cdot N_AH_A = BN_A \cdot N_AC = IN_A \cdot (N_AH_A + IH_A), \tag{1}$$

hiszen a bal oldali egyenlőség két oldalán az N_A pontnak a háromszög körülírt körére vonatkozó hatványa áll(lásd a 11.1.–11.2. feladatokat), míg a jobb oldali egyenlőség két oldalán N_A-nak arra a körre(6.5. feladat) vonatkozó hatványa áll, amelynek középpontja H_A, sugara $H_AI = H_AB = H_AC = H_AI_A$, ahol I_A a BC oldalhoz hozzáírt kör középpontja és $N_AI_A = N_AH_A + IH_A$.

Ha (1) nem teljesül, akkor nincs megoldás, ha teljesül, és a pontok a feladat szövegében megadott sorrendben következnek az egyenesen, akkor végtelen sok megoldás van. Ha a (1) összefüggésnek megfelelően vesszük fel egy N_A-n átmenő AH_A-tól különböző egyenesen N_A különböző oldalain a B, C pontokat, akkor a 11.5. feladat eredménye szerint az A, B, H_A, C pontnégyes is egy k körrre illeszkedik és az I, B, I_A, C pontnégyes is egy körön lesz. Az utóbbiban I_A az I kp-osan tükrözött képe H_A-ra és a (1) képletből megmutatható, hogy IH_A a kör sugara, tehát H_A a középpontja. Mivel $H_AB = H_AC$, így a k körben ezekhez a húrokhoz egyenlő kerületi szögek tartoznak, azaz AH_A tényleg szögfelező. Ezen a beírt kör középpontját a H_A középpontú $H_AB = H_AC$ sugarú kör metszi ki, tehát valóban I lesz a középpont. A szerkesztés helyessége igazolást nyert.

16.2.

1. segítség, útmutatás. Szerkesszük meg az A-ból induló külső szögfelező metszéspontját a BC egyenessel!

2. segítség, útmutatás. Határozzuk meg a N_AH_A távolságot, ahol H_A a szögfelezőnek és a háromszög körülírt körének A-tól különböző metszéspontja.

16.1. Rajzoljuk ki a mértani helyet dinamikus geometriai szerkesztőprogram segítségével! Próbáljuk meghatározni a kapott mértani hely jellemzőit, majd fogalmazzunk meg sejtést!

16.2. Induljunk ki a kész ábrából! Elevenítsük fel az 1.8. feladatot!

16.4. Tekintsünk olyan

a) irányítástartó; **b)** irányításváltó

egybevágóságot, amely a Q pontot a Q' pontba, a QA egyenest pedig a $Q'A$ egyenesbe képezi. Lásd még az 5.6., 16.1., 4.6. feladatokat!

16.6. Lásd a 16.4. feladatot!

16.7. Lásd a 16.6. feladatot!

16.9. Emlékezzük vissza a 16.8. a), 16.6., 6.2. feladatokra.

16.13.

1. segítség, útmutatás. Tekintsük az ABC háromszöget és D-hez keressük a 16.11., 16.12. feladatoknak megfelelő M' pontot.

2. segítség, útmutatás. Kereshetjük közvetlenül a hiperbola középpontját is. Ezzel kapcsolatos a 16.1. feladat is.

17. Vegyes feladatok

17.5.

1. segítség, útmutatás. Mutassuk meg, hogy az $AKMD$ négyszüg húrnégyszög.

2. segítség, útmutatás. Alkalmazzuk azt a hasonlóságot, amely A-t D-be, B-t C-be viszi.

17.8. A feltétel azt jelentené, hogy ACF és FCB – a csúcsok ilyen sorrendjében – hasonlók, ami viszont lehetetlen.

17.29. Összegezni kell a 17.27. feladat és a 17.28. feladat eredményét és fel kell használni, hogy – az ottani jelölésekkel – HG a köréírt kör átmérője.

17.34. Ez egyszerű következménye az előző két feladatnak: a 17.32. és 17.33. feladatoknak.

17.35. Ez is egyszerű következménye az előző két feladatnak: a 17.32. és 17.33. feladatoknak.

17.38. Elevenítsük fel az 1.10. feladatot!

17.44. Jelölje az A-ból induló belső szögfelező és a BC oldal metszéspontját F, a beírt kör közepét O, O merőleges vetületét a BC oldalon O', az A-ból induló magasság talppontját ugyanezen az oldalon T. Ismert, hogy $TAF\angle$ épp a B-nél és C-nél levő szög különbségének a fele. A párhuzamosságok miatt az $O'OF\angle$ is ugyanekkora. Tehát az $OO'F$ háromszög szerkeszthető. Az FO egyenes és a magasságvonal hosszának ismeretében A is szerkeszthető, és a beírt kör is. Az A-ból húzott érintők megadják a megoldást.

A szerkeszthetőség feltétele: a magasságvonalnak nagyobbnak kell lennie a beírt kör sugarának felénél.

17.45. Húzzuk meg az X és Y pontbeli közös érintőket. A metszéspontjuk legyen P. Mit mondhatunk a PE szakaszról?

17.46. Ha az A és B csúcsból induló súlyvonal és a C csúcsból induló magasságvonal hossza van adva, akkor – S-sel jelölve a háromszög súlypontját – az ASB háromszögben ismert két oldal és a közös csúcsból induló magasságvonal hossza, tehát e háromszög szerkeszthető.

17.47. Az első egyenlőség kijön az ABA' és CBC' háromszögek hasonlóságából és a két másik megfelelő háromszögpár hasonlóságából. (De kijön Ceva tételéből is.) A második egyenlőség pedig kijön például abból, hogy az $A'B'C$, $A'BC'$ és $AB'C'$ háromszögek mindegyike hasonló az ABC háromszöghöz (a csúcsok ilyen sorrendjében), tehát a második és harmadik szorzat hányadosa átírható úgy, hogy az ABC háromszög minden oldala egyszer a számlálóban, egyszer a nevezőben szerepeljen.

De gyorsan kijön mindkét egyenlőség egyszerű trigonometriával és színusz-tétellel is.

17.49. A 17.48. feladatra adott második megoldás itt is működik.

17.52. M-nek az ABC háromszög oldalegyeneseire eső merőleges vetületeiről van szó. L. a 6.7. feladatot

17.61. Induljunk ki a kész ábrából és vegyük fel a DE szakaszon azt a P pontot, amelyre $DP = BD$ (következésképp $PE = EC$). Igazoljuk, hogy P a beírt kör középpontja.

17.62. Adjuk össze a gömb egy tetszőleges pontjának és az átellenes pontjának az n ponttól vett távolságait. Ennek a $2n$ távolságnak az összege nagyobb $2n$-nél.

17.61. Induljunk ki a kész ábrából és vegyük fel a DE szakaszon azt a P pontot, amelyre $DP = BD$ (következésképp $PE = EC$). Igazoljuk, hogy P a beírt kör középpontja.

17.62. Adjuk össze a gömb egy tetszőleges pontjának és az átellenes pontjának az n ponttól vett távolságait. Ennek a $2n$ távolságnak az összege nagyobb $2n$-nél.

17.63. Használjuk ki, hogy az $XPY\angle$ szög állandó és keressünk olyan T és U pontot a CD egyenesen, amelyre a TX és YD szakaszok szorzata állandó!

Megoldások

1. Bevezetés

1.1.

1. megoldás. Betűzzünk úgy, hogy az O közepű kör érintési pontja E, az O' közepű köré F. Ekkor $OAE\angle = 90° - EOA\angle/2$ és $FAO'\angle = 90° - AO'F\angle/2$. Tehát $EAF\angle = (EOA\angle + AO'F\angle)/2$. OE és $O'F$ párhuzamossága miatt utóbbi két szög összege $180°$, tehát $EAF\angle = 90°$.

2. megoldás. Az A-ban húzott közös belső érintő messe az EF szakaszt a G pontban. Ekkor $GE = GA = GF$ az egy pontból húzott érintőszakaszok egyenlősége folytán. Tehát a Thálész-tétel szerint $EAG\angle$ derékszög.

1.2. Az érintési az az A pont, ahol a két kör érinti egymást. Ha ugyanis az A pontban meghúzzuk a közös belső érintőjüket, akkor ez egyrészt merőleges a centrálisra, másrészt a közös külső érintővel való metszéspontját G-vel jelölve az AG szakasz épp az EF fölötti Thálész-kör sugara (l. az 1.1. feladat második megoldását).

1.3.

1. megoldás. Az $OEFO'$ derékszögű trapéz középvonala egyrészt merőleges EF-re, másrészt az OO' fölé rajzolt Thálész-kör sugara.

2. megoldás. Tükrözzük az $OEFO'$ trapézt EF-re! Az így kapott egyenlőszárú trapézban a két szár hossza a két sugár összege, a két alap hossza pedig a két átmérővel egyenlő. Vagyis érintőnégyszögről van szó (hiszen szemközti oldalainak összege egyenlő). A beírható kör átmérője nyilván a szimmetriatengyel, azaz EF.

1.4. a) Igen.

Ha a beírt kör I középpontja egyenlő távolságra van az A, B csúcsoktól, akkor IAB egyenlő szárú háromszög, amely szimmetrikus az AB szakasz t felezőmerőlegesére. A CA, CB oldalak a beírt kört érintik és különböznek az AB oldaltól. Az A és a B csúcson át AB-n kívül csak egy-egy további érintő húzható a beírt körhöz, és ez az AB egyenes AI-re illetve BI-re vonatkozó tükörképe. Ezek egymás t-re vonatkozó tükörképei, hiszen AB önmaga tükörképe, míg AI és BI egymás tükörképei. Így ABC is szimmetrikus t-re, azaz egyenlő szárú.

b) Nem.

Jelölje az AC, BC oldalak felezőpointját F_{AC} illetve F_{BC}, míg a beírt kör érintési pontját ezeken az oldalakon T_{AC} és T_{BC}.

Az $IT_{AC}F_{AC}$, $IT_{BC}F_{BC}$ háromszögek derékszögűek és IT_{AC}, IT_{BC} oldalaik egyenlőek (a beírt kör sugara), így az IF_{AC}, IF_{BC} szakaszok pontosan akkor egyenlőek, ha a $T_{AC}F_{AC}$, $T_{BC}F_{BC}$ szakaszok egyforma hosszúak.

Ismeretes, hogy (a szokásos jelölésekkel)

$$CT_{AC} = CT_{BC} = \frac{a+b-c}{2}, \qquad CF_{AC} = \frac{b}{2}, \qquad CF_{BC} = \frac{a}{2},$$

azaz

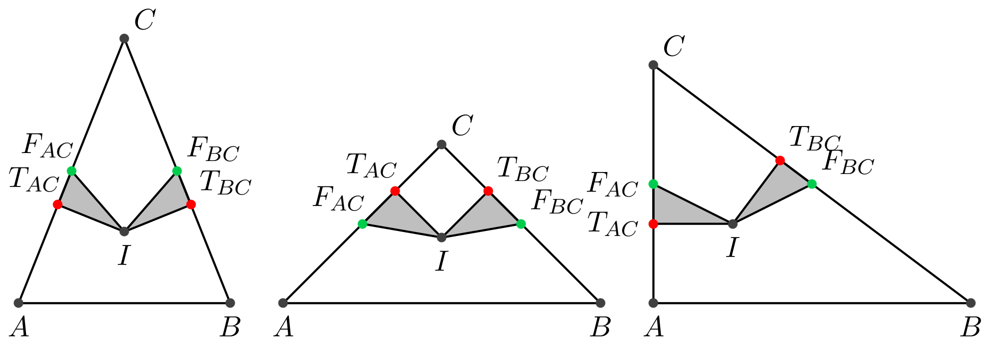
$$T_{AC}F_{AC} = \left|\frac{a-c}{2}\right|, \qquad T_{BC}F_{BC} = \left|\frac{b-c}{2}\right|.$$

A két vizsgált szakasz tehát pontosan akkor egyenlő, ha (lásd az 1. ábrát)

$\frac{a-c}{2} = \frac{b-c}{2}$, azaz ha $a = b$, vagy ha

$-\frac{a-c}{2} = \frac{b-c}{2}$, azaz ha $c = \frac{a+b}{2}$.

Az utóbbi esetre példa az a nevezetes háromszög, amelynek oldalai 3, 4 és 5 egység hosszúak.



1.4M.1. ábra.

1.5. A két kör középpontja O és O', előbbit a közös külső érintő E-ben, utóbbit F-ben érinti. Az előbbi sugara r, az utóbbié R és $R \geq r$. Húzzunk párhuzamost E-n keresztül az OO' centrálissal, ez $O'F$-et F'-ben metszi. Az $EE'F$ háromszögben F-nél derékszög van, $EE' = OO' = r + R$, $E'F = R - r$. A Pitagorasz-tételből azt kapjuk, hogy $OO'^2 = 4rR$, ami ekvivalens a feladat állításával.

Megjegyzés. A feladat állítását érdemes összevetni az 1.10. feladattal. Az itteni állítás következik az ottaniból, ha meggondoljuk, hogy az $OEFO'$ trapézt bővítve az EF-re vett tükörképével egy olyan trapézt kapunk, amelynek van beírt köre és annak átmérője éppen EF. Nem véletlen, hogy a két feladat bizonyítása is nagyon hasonlít.

1.6. c) Az ABM háromszög magasságpontja a C csúcs. A két háromszögben a magasságok talppontjai ugyanazok a pontok.

Valóban, az ABC háromszögnek az az M pont a magasságpontja, amelyre

$$AM \perp BC, \qquad BM \perp CA, \qquad CM \perp AB. \tag{1}$$

Ekkor természetesen ABM-nek is magasságpontja C, hiszen a fenti relációk így írhatók át:

$$CB \perp MA, \qquad CA \perp BM, \qquad CM \perp AB. \tag{2}$$

Az ABC háromszög magasságainak talppontjai a (1) sorban említett merőleges egyenespárok metszéspontjai, míg az MBC háromszög magasságainak talppontjai a (2)-beli merőleges egyenespárok metszépontjai. A (1), (2) sorokban ugyanazok az egyenespárok szerepelnek, így ugyanazok a talppontok is.

Definíció: *Ortogonális pontnégyes*nek nevezzük a sík négy olyan pontját, amelyek közül bármelyik kettő összekötő egyenese merőleges a másik kettő egyenesére.

Megjegyzés: Bármely – nem derékszögű – háromszög három csúcsa és magasságpontja ortogonális pontnégyest alkot. Megfordítva: bármely ortogonális pontnégyes bármelyik három pontja egy olyan nem derékszögű háromszög három csúcsa, amelynek magasságpontja a negyedik pont.

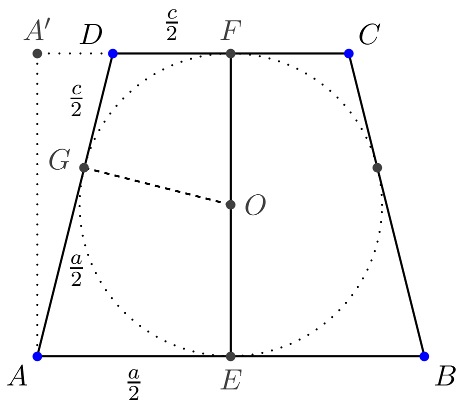
1.9.

1. megoldás. Jelölje a beírt kör érintési pontjait az AB, CD,DA oldalakon rendre E,F és G (lásd az 1. ábrát). $AE = AG$ és $DF = DG$, mert a pontból a körhöz húzott két érintő hossza egyenlő, tehát $AD = \frac{a+c}{2}$.

Jelölje az A csúcs merőleges vetületét a DC egyenesen A'. Az AA' derékszögű háromszögben $DA' = |DF - AE| = \frac{|a-c|}{2}$ és $EF = AA' = 2r$, így a Pitagorasz-tétel szerint:

$$(2r)^2 + \left(\frac{|a-c|}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+c}{2}\right)^2,$$

amiből $r = \frac{\sqrt{ac}}{2}$.



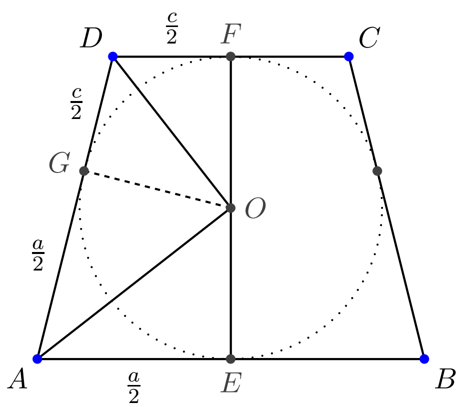
1.9M1.1. ábra.

2. megoldás. Használjuk az 1.9M1. megoldás jelöléseit és ábráját. Vegyük észre, hogy az $AEOG$, $GOFD$ négyszögek az AO illetve a DO átlójukra szimmetrikusak, azaz $AOE\angle = GOE\angle$ és $GOD\angle = DOF\angle$, azaz $AOD\angle = \frac{EOF\angle}{2} = 90^{\circ}$.

Az AOD derékszögű háromszögre felírhatjuk a magasságtételt (vagy másként: az AOG, ODG háromszögek hasonlóságát):

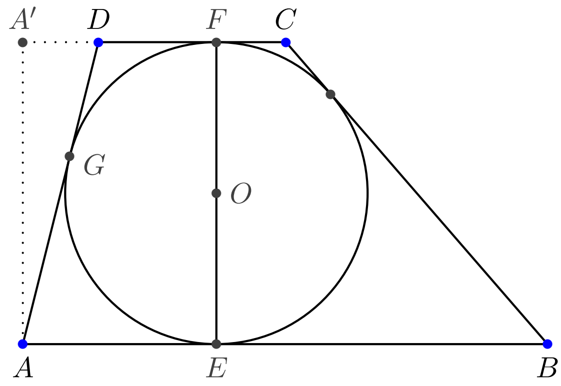
$$OG^2 = AG \cdot GD,$$

tehát $r^2 = \frac{a}{2} \cdot \frac{c}{2}$.



1.9M2.1. ábra.

1.10. Az A csúcs merőleges vetületét a DC egyenesen jelölje A' illetve B'. Mivel $ABCD$ érintőnégyszög, ezért $AD = AE + DF$. Másrészt $DA' = |DF - AE|$ és $EF = AA' = 2r$. Az $AA'D$ derékszögű háromszögben felírva a Pitagorasz-tételt épp a kívánt állítást kapjuk.



1.10M.1. ábra.

1.1. Lásd az 1. ábrát!

1.2. Legyen az adott pont A, az adott c kör középpontja O, a szelő egy rögzített helyzetében messe a kört a C_1, C_2 pontokban, végül legyen a C_1C_2 szakasz felezőpontja – a vizsgálat tárgya – F (lásd az 1. ábrát). A C_1C_2 húr felezőmerőlegese átmegy a kör középpontján, tehát $AFO\angle =$ $= 90°$. Ez azt jelenti, hogy akeresett mértani hely része az OA szakasz Thalesz-körének.

Állítjuk, hogy a Thalesz körnek a c kör belsejébe tartozó pontjainak halmaza a keresett mértani hely. Valóban, a húr felezőpontja a kör belsejébe esik, Thalesz-körnek csak ezek a pontjai lehetnek jók. Másrészt, ha F az AO szakasz Thalesz körének c belsejébe eső pontja, akkor az AF egyenes két helyen metszi a kört, tehát szelő, és az OF egyenes a rá O-ból állított merőleges, tehát F a szelő húrdarabjának felezőpontja.

A Thalesz-körnek és az adott c körnek lehetnek közös pontjai, ezek elfajult szelőkhöz, az érintőkhöz tartoznak.

1.3.

1. megoldás. A dinamikus geometriai programmal készült 1. ábra alapján sejthetjük, hogy a sorozat periodikus, $C_2 = C_0$. Ezt alább bizonyítjuk is.

Jelöljük a $\frac{BC_0}{C_0A}$ arányt $\frac{p}{q}$-val. A BC_0A_0, BAC háromszögek középpontosan hasonlóak, így $\frac{p}{p+q} = \frac{BC_0}{BA} = \frac{BA_0}{BC}$, azaz (hivatkozhatunk a párhuzamos szelők tételére is):

$$\frac{p}{q} = \frac{BC_0}{C_0A} = \frac{BA_0}{A_0C}, \tag{1}$$

tehát $\frac{q}{p} = \frac{A_0C}{BA_0}$. A CA_0B_0, CBA háromszögek hasonlóságából ehhez hasonlóan:

$$\frac{q}{p} = \frac{A_0C}{BA_0} = \frac{B_0C}{AB_0}, \tag{2}$$

tehát $\frac{p}{q} = \frac{AB_0}{B_0C}$. Így haladhatunk tovább:

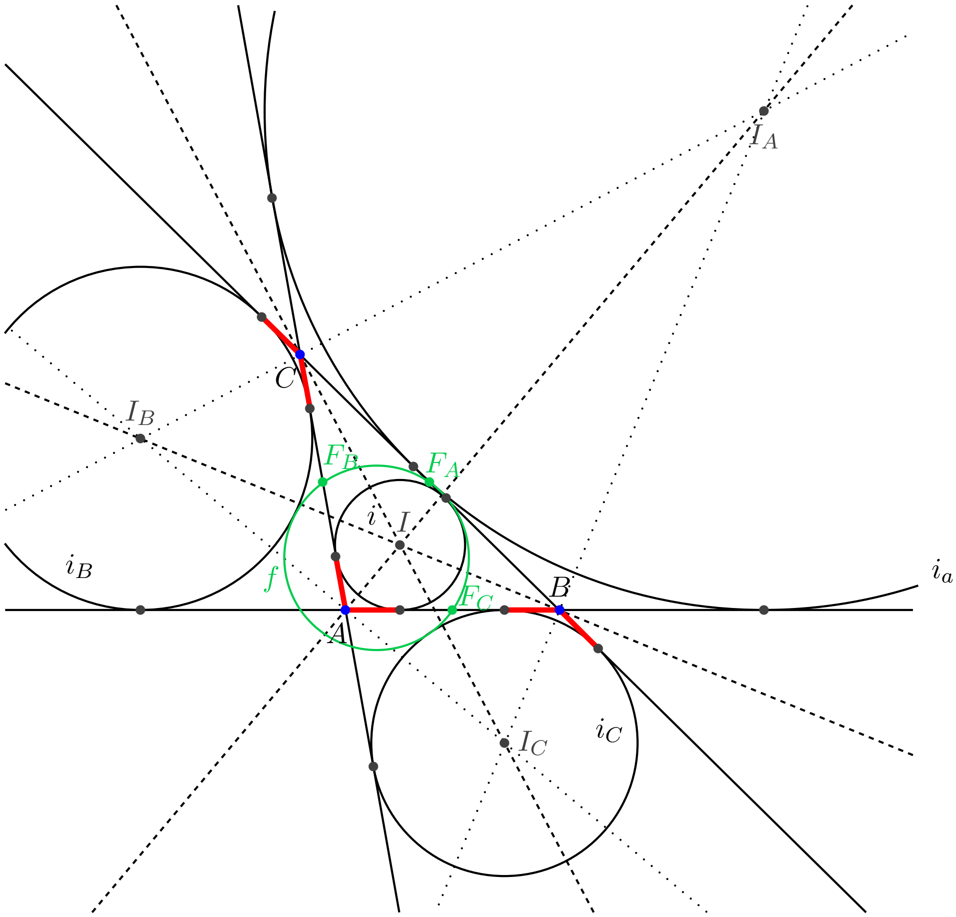
$$\frac{p}{q} = \frac{AB_0}{B_0C} = \frac{AC_1}{C_1B}, \qquad \frac{q}{p} = \frac{C_1B}{AC_1} = \frac{A_1B}{CA_1}, \qquad \frac{p}{q} = \frac{CA_1}{A_1B} = \frac{CB_1}{B_1A},$$

végül

$$\frac{q}{p} = \frac{B_1A}{CB_1} = \frac{C_2A}{BC_2},$$

azaz

$$\frac{BC_0}{C_0A} = \frac{p}{q} = \frac{BC_2}{C_2A},$$



1.1M.1. ábra.

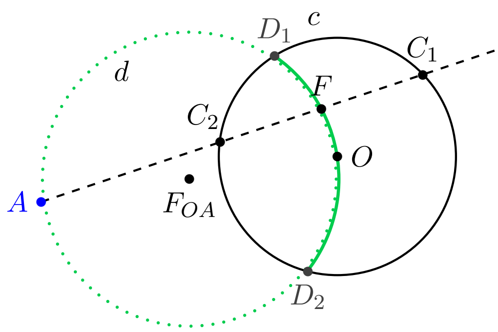
tehát C_0 és C_2 ugyanolyan arányban osztja fel a BA szakaszt. Ez csak úgy lehet, hogy C_2 és C_0 egybeesik.

2. megoldás. Vessük össze a BC_0A_0, C_1AB_0 háromszögeket (lásd az 1. ábra bal oldalát)! E két háromszög középpontosan hasonló az eredeti ABC háromszöghöz, így egymáshoz is hasonlóak. A kis háromszögek A_0, C_0 csúcsai a nagy háromszög C csúcsának felelnek meg, míg C_0 és A az A-nak, B és C_1, a B-nek. A BC_0A_0, C_1AB_0 háromszögek egybevágók is. Az $AC_0A_0B_0$ négyszög szemközti oldalai párhuzamosak, így az $\overrightarrow{AC_0} = \overrightarrow{A_0B_0}$ vektorral való eltolás az C_0A_0 szakaszt AB_0-ba, az egyenlő szögek miatt a B csúcsot C_1-be viszi.

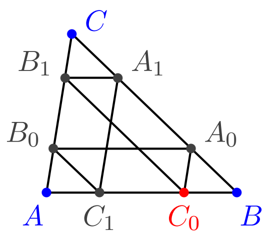
Az egybevágó háromszögek sora folytatható. A C_1AB_0 háromszög eltolásával kapható az A_1B_1C, annak eltolásával pedig a BC_2A_2 háromszög. A B csúcshoz a háromszög belsejébe csak egyféleképpen rakható be önmaga eltoltjaként a BC_0A_0 háromszög, tehát C_0 megegyezik C_2-vel, A_0 pedig A_2-vel. A pontsorozat innen ismétlődik.

2. Háromszög adatai az oldalak függvényében

Ez a fejezet nem tartalmaz megoldást.



1.2M.1. ábra.



1.3M1.1. ábra.

3. Egybevágóságok

3.4.

$$a^{\perp}b^{\perp}\sphericalangle \equiv a^{\perp}a\sphericalangle + ab\sphericalangle + bb^{\perp}\sphericalangle \equiv 90° + ab\sphericalangle + 90° \equiv ab\sphericalangle \pmod{180°}.$$

3.6. Eredmény: az a) állítás igaz, a b) állítás hamis.

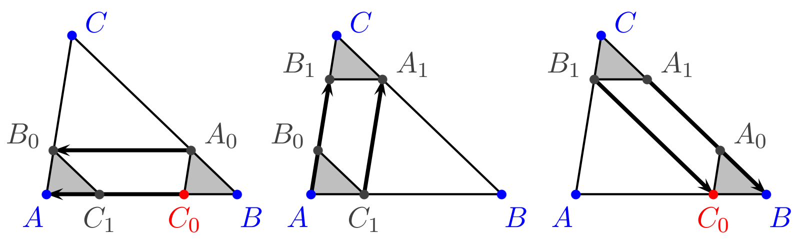
a) Legyen $a \cap b = C$, $b \cap c = A$, $c \cap a = B$, $a' \cap b' = C'$, $b' \cap c' = A'$ és fektessünk az $A'C'$ szakaszra az ABC háromszöggel hasonló, azzal azonos irányítású $A'B'C'$ háromszöget (A-nak feleljen meg A', míg C-nek a C'). A $B'A'$ egyenes ugyanakkora szöget zár be $A'C' = b'$-vel mint c' és a $B'C'$ egyenes is ugyanúgy hajlik b'-höz, mint a', így a 3.5. feladatban leírt egyértelműségi tétel miatt $B'A' = c'$ és $B'C' = a'$, tehát az a', b', c' egyenesek az a, b, c egyenesekhez hasonló háromszöget határolnak.

b) Tekintsünk pl két (ellenkező körüljárású) négyszöget az alábbi belső szögekkel: 45°, 120°, 75°, 120° illetve −135°, −60°, −105°, −60°. Az egyik négyszög szögei rendre megegyeznek mod 180^{circ} a másik négyszög szögeivel, így a megfelelő egyenesek szöge egyenlő, de a két négyszög szögei mégsem egyenlőek.

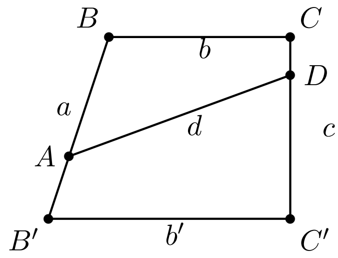
Az 1. ábrán egy másik konstrukció látható. A $B'BCC'$ trapézt ($b = BC \parallel B'C' = b'$) elvágtuk a $BB' = a$, $CC' = c$ szárakon át húzott $d = AD$ egyenessel. Az $ABCD$, $AB'C'D$ négyszögek szögei itt is megegyeznek egymással mod 180°, de a két négyszög szögei csak speciális esetben egyenlők egymással.

3.7. A megoldáshalmaz bármely $\overrightarrow{m}$ irányított egyenes és tetszőleges μ valós szám esetén egy m-mel párhuzamos egyenes.

3.8. A keresett mértani hely a 3.7. feladat eredménye szerint két nem párhuzamos egyenes metszéspontja, azaz bármely $\mu \in \mathbb{R}$ és $\nu \in \mathbb{R}$ esetén egyetlen pont.



1.3M2.1. ábra.



3.6M.1. ábra.

3.10. A $P \in n$ esetben az arány algebrailag nem értelmezett, de egy hasznos geometriai értelmezésre később visszatérünk.

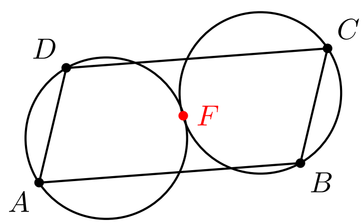
A $\nu \neq 0$ esetben a mértani hely egy pontban kilukasztott egyenes, amely átmegy az $\overrightarrow{m}$, $\overrightarrow{n}$ egyenesek O metszéspontján, ahol ki van lukasztva, tehát maga O nem tartozik a mértani helyhez.

Valóban, O-ban nem értelmezett az arány, de ha P a távolságaránynak megfelelő pont, és P' az OP egyenes tetszőleges pontja és $\lambda = \frac{OP'}{OP}$, akkor az O középpontú λ arányú középpontos nagyítás P-t P'-be képezi, így a 3.9. feladat eredménye szerint a két irányított egyenestől való távolság λ-val szorzódik, arányuk változatlan marad. Ezért a megoldáshalmaz O-n átmenő (lukas) egyenesekből áll.

Másrészt, bármelyik ilyen egyenes elmetszi az n-től különböző, de azzal párhuzamos $d(P, \overrightarrow{n}) = 1$ egyenletű n_1 egyenest (lásd a 3.7. feladatot). Erre a P_0 metszéspontra szükségképpen $d(P, \overrightarrow{m}) = \frac{\mu}{\nu}$. Másrészt a 3.8. feladat eredménye szerint tetszőleges $\mu_0 = \frac{\mu}{\nu} \in \mathbb{R}$ (és $\nu_0 = 1$) érték esetén pontosan egy olyan P_0 pont van n_1-e, amelyre $d(P, \overrightarrow{m}) = \mu_0$, tehát minden $\frac{\mu}{\nu} \in \mathbb{R}$ arányra egyetlen lukas egyenes a megoldás.

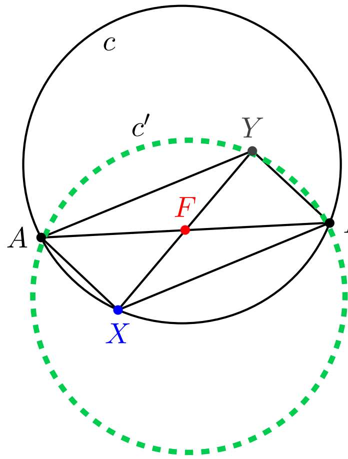
Az n egyenes pontjaira $d(P, \overrightarrow{n}) = 0$, mondhatjuk, hogy ezek – kivéve O-t – a $\mu_0 = \infty$ arányhoz tartoznak.

3.7. A két kör érinti egymást, mert a paralelogramma középpontosan szimmetrikus és a középpontján átmenő kör képe azt érintő kör.



3.7M.1. ábra.

3.8. a) A paralelogramma F szimmetriaközéppontja az AB, XY átlók közös felezőpontja. Az AB szakasszal együtt F is adott, erre kell tükrözni X-et, hogy Y-t kapjuk. Így míg X befutja az adott kört addig X e kör F-re tükrözött képét futja be. Ahogy X nem egyezhet meg az A, B pontokkal úgy Y is kihagyja a köréből a B, A pontokat.



3.8M.1. ábra.

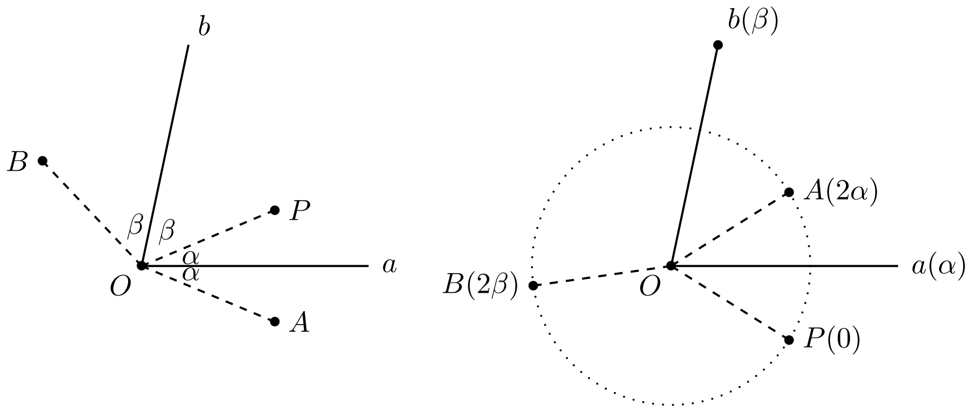
b) A paralelogramma AB oldala, sőt a $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{XY}$ vektor is adott. Az Y csúcs tehát az X csúcs $\overrightarrow{BA}$ vektorral való eltoltja. Míg X befutja az adott kört addig X e kör $\overrightarrow{BA}$ vektorral való eltoltját futja be, kihagyva belőle az A, B pontok eltoltjait.

3.1. Jelölje a szög csúcsát O, a PO szakasz és az a szár szögét α, míg PO és b szögét β. A tükrözés miatt AO és a szöge is α illetve BO és b szöge is β, azaz

$$AOB\angle = 2\alpha + 2\beta = 2(\alpha + \beta) = 2\gamma,$$

ahol $\gamma = \alpha+\beta$ az a, b szárak szögével egyezik meg. Másrészt a tükrözések révén: $AO = PO = BO$ tehát az AOB háromszög egyenlő szárú.

a) Most $AOB\angle = 2 \cdot 78° = 156°$, azaz az AOBháromszög szögei: 156°, 12°, 12°.



3.1M.1. ábra.

b) Itt $AOB\sphericalangle = 2 \cdot 110° = 220°$, így az AOB háromszög az ellenkező oldalon jön létre, azaz az AOB háromszög szögei: 140°, 20°, 20°.

Ha a P pont tetszőlegesen helyezkedik el, akkor számoljunk irányított szögekkel! Pl rakjunk egy O középpontú P-n átmenő kört az ábrára és annak ívén számoljuk a szögeket! Tartozzon P a $0°$ forgásszöghöz, az a szögszár az α forgásszöghöz, míg b a β-hoz. A tükrözés miatt A a 2α, B a 2β forgásszöghöz tartozik, így irányítottan számolva:

$$AOB\sphericalangle = 2\beta - 2\alpha = 2(\beta - \alpha) = 2\gamma,$$

ahol γ az a, b félegyenesek irányított szöge.

3.2. **a)** -10; **b)** 2 **c)** $-x$ **d)** 4 **e)** 16 **f)** $14 - x$ **g)** $2a - 10$ **h)** $2a + 2$ **i)** $2a - x$.

3.3. **a)** középpontos tükrözés 1-re.
b) eltolás 2-vel.
c) Origó centrumú 2 arányú középpontos nagyítás.

3.4. **a)** $(-9; 3)$; **b)** $(-2; -2)$; **c)** $(-p; -q)$ **d)** $(5; 1)$ **e)** $(12; -4)$ **f)** $(14 - p; -2 - q)$ **g)** $(2a - 9; 2b + 3-)$ **h)** $(2a - 2; 2b - 2)$ **i)** $(2a - p; 2b - q)$.

3.5. **a)** $(9; 3)$; **b)** $(2; -2)$; **c)** $(p; -q)$; **d)** $(9; 9)$; **e)** $(9; 4)$; **f)** $(p; 6 - q)$; **g)** $(2a - 9; q)$; **h)** $(2a - 2; 2)$; **i)** $(2a - p; q)$; **j)** $(-3; 9)$; **k)** $(2; 2)$; **l)** $(q; p)$ **m)** $(7; -5)$; **n)** $(2; 2)$; **o)** $(4 - q; 4 - p)$.

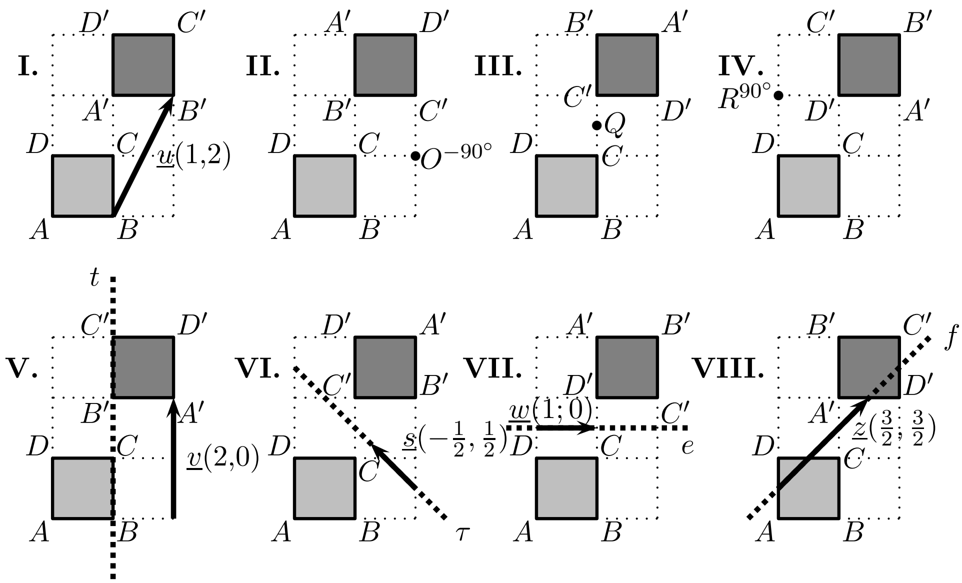
3.6. **a)** $(-18; 1)$; **b)** $(-2{,}6)$; **c)** $(-p, q + 4)$; **d)** $(-16{,}1)$; **e)** $(0{,}6)$; **f)** $(2 - p, q + 4)$; **g)** $(1{,}13)$; **h)** $(5{,}5)$; **i)** $(q + 3, p + 3)$; **j)** $(11, -4)$; **k)** $(4{,}0)$; **l)** $(6 - q{,}2 - p)$.

3.7. **a)** $(3; 9)$; **b)** $(-2; 2)$; **c)** $(-q; p)$; **d)** $(6; 6)$; **e)** $(1; -1)$; **f)** $(3 - q; p - 3)$; **g)** $(-3; -9)$; **h)** $(2; -2)$; **i)** $(q; -p)$; **j)** $(0, -6)$; **k)** $(5{,}1)$; **l)** $(3 + q{,}3 - p)$.

3.9. **a)** Az $\vec{u}(0; 3)$ vektorral való eltolás is megfelelő és az $y = 2{,}5$ egyenesre való tengelyes tükrözés is.
b) Az $\vec{u}(1; 3)$ vektorral való eltolás is megfelelő és az a csúsztatva tükrözés is, amelynek tengelye az $y = 2{,}5$ egyenes, vektora pedig $\vec{v}(1; 0)$.
c) Az $O(-1; 1)$ pont körüli $90°$-os forgatás is jó és az $y = x + 2$ egyenesre való tengelyes tükrözés is.
d) Az $O(-1; 2)$ pont körüli $90°$-os forgatás is jó és az a csúsztatva tükrözés ism amelynek tengelye az $y = x + 2$ egyenes, vektora pedig $\vec{v}(1; 1)$.

3.10. **a)** Nyolcféle megfelelő betűzés lehet: az A csúcs négyféle helyre kerülhet, szomszédja B az A képének egyik szomszédja, az minden esetben kétféle folytatásra ad lehetőséget. A többi csúcs már egyértelmű. Az 1. ábrán láthatók a megoldások.
b) Az I. esetben eltolásról van szó, a II.–IV esetekben forgatásról, melynek szöge rendre $-90°$, $180°$, $90°$, míg az V.–VIII. esetekben csúsztatva tükrözésről, melynek tengelyét és vektorát az 1. ábrán tüntettük fel.

3.4.



3.10M.1. ábra.

1. megoldás. Ha az a, b egyenesek párhuzamosak, akkor csak akkor van megoldás, ha F felezi e két párhuzamos távolságát, ilyenkor viszont végtelen sok megoldás van.

Tegyük fel most, hogy a és b metszik egymást egy P pontban. Induljunk ki a kész ábrából. Tekintsük azt a Q pontot, amelyre a $PAQB$ négyszög paralelogramma. Mivel a paralelogramma átlói felezik egymást és ez a felezőpont az adott F pont és P is adott, így Q szerkeszthető. A Q-n át b-vel húzott párhuzamos kimetszi a-ból A-t, és hasonlóan kapható B is.

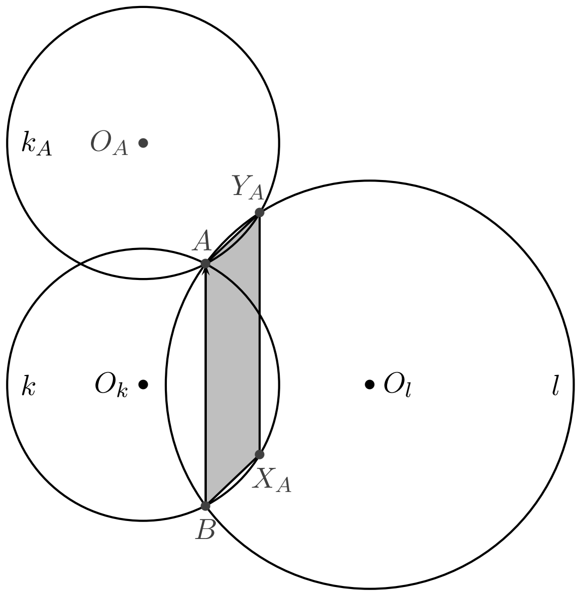
2. megoldás. Felejtsük el egy pillanatra, hogy B illeszkedik b-re és szerkesszük meg a lehetséges B pontok mértani helyét a többi feltétel alapján. A 3.1., 3.3. feladatokhoz hasonlóan itt is az adódik, hogy a keresett mértani hely az a alakzat középpontos tükörképe az F pontra. Ez az a' alakzat egy egyenes és b-vel való metszéspontja a keresett B csúcs. B-t F-re „visszatükrözve" kapjuk A-t.

3.5. Legyen az adott k, l körök két metszéspontja A és B, a paralelogramma X csúcsa legyen k-n, míg Y az l-en. A csúcsok elvileg háromféle lényegesen különböző sorrendben lehetnek a paralelogramma csúcsai: $ABXY$, $ABYX$, $AXBY$ (ugyan $4! = 24$ sorrendben lehet leírni a négy betűt, de A-t tehetjük előre, és mehetünk olyan irányban körbe, hogy B megelőzze Y-t).

Az utolsó esetben a 3.8. a) feladat megoldása szerint, ha X befutja k-t, akkor az $AXBY$ paralelogramma Y csúcsa a k körnek az AB szakasz F felezőpontjára vonatkozó k' tükörképén mozog. A k' kör átmegy az A és B pontokon, tehát vagy nincs más közös pontja l-lel, vagy megegyezik l-lel. Az előbbi esetben nincs megoldás, az utóbbiban végtelen sok van, X lehet a k kör tetszőleges – de A-tól és B-től különböző – pontja, míg Y az X középpontosan tükrözött képe F-re.

Ha a sorrend $ABXY$, akkor a 3.8. b) feladat megoldása szerint, ha X befutja k-t, akkor a paralelogramma Y csúcsa a k körnek a $\overrightarrow{BA}$ vektorral való k_A eltoltján mozog. A B pont eltoltja A, így az k_A kör átmegy A-n és az l kört még Y_A pontban metszi (lásd a **??**. ábrát), vagy érinti l-t A-ban (lásd a **??**. ábrát). Az utóbbi esetben nincs megoldás, az előbbiben az Y_A pontot a $\overrightarrow{AB}$ vektorral „visszatolva" megtaláljuk k-n azt az X_A-t, amelyre ABX_AY_A paralelogramma.

Ha a sorrend $ABYX$, akkor az előzőhöz hasonlóan kell eljárni, de most a k kör $\overrightarrow{AB}$ vektorral való k_B eltoltjának és l-nek B-n kívüli Y_B metszéspontját $\overrightarrow{BA}$-val visszatolva kapjuk azt az X_B



3.5M.1. ábra.

pontot, melyre ABY_BX_B paralelogramma. Itt pontosan akkor nem kapun megoldást, ha k_B érinti l-t (B-ben).

Vizsgáljuk meg, mikor nem jön létre az egyik illetve a másik megoldás! Jelölje a körök középpontjait O_k és O_l. A k_A-kör pontosan akkor érinti l-t, ha az AO_k, O_lB egyenesek párhuzamosak (lásd a **??**. ábrát). Ilyenkor az O_lAO_kB négyszög trapéz, de az O_kO_l átlójára szimmetrikus, tehát deltoid. A rombuszok az átlójukra szimmetrikus trapézok, tehát akkor van speciális elrendeződés –mind a három esetben, tehát az $ABXY$, $ABYX$, $AXBY$ sorrendek mindegyikében – ha a két adott kör sugara egyenlő.

Összefoglalva: ha a két kör sugara egyenlő, akkor végtelen sok olyan paralelogramma van, amelyben a csúcsok sorrendje $AXBY$, de más típusú paralelogramma nincs ilyenkor, míg ha a két kör sugara különböző, akkor csak az $ABXY$, $ABYX$ sorrendekhez tartoznak paralelogrammál, mindkettőből egy-egy van.

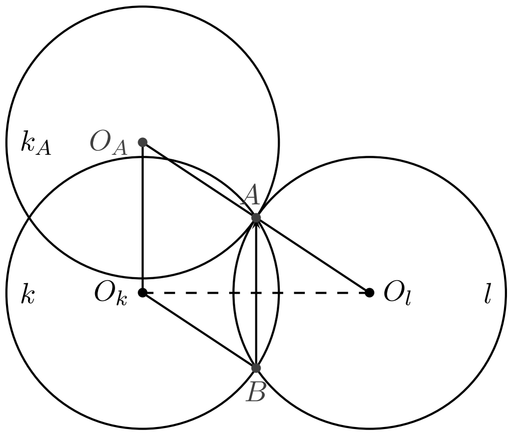
3.5.

1. megoldás. *Dr. Agy megoldása* Akkor jön létre két négyszög, ha az egyenes két szemköztes oldalt metsz. Az ilyen egyenes mindig két egybevágó négyszögre vágja a paralelogrammát, hiszen e két négyszög oldalai párhuzamosak, szögei egyenlők és még két-két egyenlő hosszú oldaluk is van, így az egybevágóságok alapeseti szerint egybevágók.

Megjegyzés Természetesen Dr. Agy megoldása hibás.Az egybevágóságoknak nincs ilyen alapesete, az alapesetek csak háromszögekre vonatkoznak.

2. megoldás. A paralelogramma középpontján átmenő egyenes két egybevágó négyszögre vágja a paralelogrammát, mert az erre a pontra vonatkozó középpontos tükrözés kicseréli a két négyszöget. Valóban, paralelogramma középpontjára való tükrözés a rajta átmenő egyenest és a paralelogrammát is önmagára képezi, de a ez egyenes két oldalán található félsíkokat kicseréli egymással, így a négyszögeket egymásba viszi.

Tekintsünk egy – a paralelogramma O középpontját nem tartalmazó – e egyenest, és annak O ra középpontosan tükrözött e' képét. A paralelogrammából e által levágott N_1, N_2 négyszögek



3.5M.2. ábra.

közül az O-t nem tartalmazó N_1 négyszög egybevágó az e' által levágott O-t nem tartalmazó N_1' négyszöggel, hiszen ez a két rész középpontosan szimmetrikus O-ra. Így N_1 nem lehet egybevágó az N_1'-etvalódi módon tartalmazó, így annál nagyobb területű N_2-vel. Tehát a középpontot nem tartalmazó egyenes nem vágja egybevágó részekre a paralelogrammát.

3.9. Legyen a két adott pont A és B, a belőlük az adott e egyenesre bocsájtott merőleges talppontja T_A illetve T_B. A feltétel szerint az AT_A, BT_B szakaszok egyenlő hosszúak és párhuzamosak (vagy egy egyenesbe esnek). Keressük azt az egybevágósági transzformációt, amely A-t B-be és egyúttal T_A-t a T_B-be képezi.

b) Az A, B pontok az e egyenes azonos oldalán helyezkednek el, az AT_A, BT_B vektorok egyenlők, a transzformáció az $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{T_AT_B}$ vektorral való valódi eltolás (nem identitás, mert $A \neq B$). A $\overrightarrow{T_AT_B}$ vektor ($T_A \neq T_B$) párhuzamos az adott egyenessel, $\overrightarrow{AB}$ pedig az adott pontok összekötő egyenesével, tehát ez a két egyenes párhuzamos. Másrészt, ha az adott egyenes párhuzamos az AB egyenessel, akkor az AT_AT_BB négyszög szemköztes oldalai párhuzamosak, így az paralalogramma, $AT_A = BT_B$.

c) Az A, B pontok az e egyenes különböző oldalán helyezkednek el, tehát most az $\overrightarrow{AT_A}$, $\overrightarrow{BT_B}$ vektorok egymás ellentettjei, a transzformáció az AB, T_AT_B szakaszok közös felezőpontjára való középpontos tükrözés. A T_AT_B (esetleg ponttá fajult) szakasz, így annak felezőpontja is illeszkedik e-re, tehát az adott egyenes átmegy az AB szakasz F felezőpontján. Másrészt, ha e átmegy F-en, akkor e és az AB szakasz is középpontosan szimmetrikus F-re, tehát $AT_A = BT_B$.

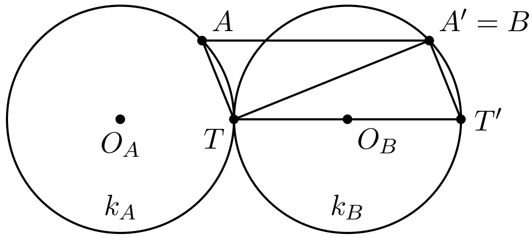
a) Pontosan azok az egyenesek jók, amelyek átmennek az AB szakasz felezőpontján vagy párhuzamosak az AB egyenessel.

3.10. Három ilyen egyenes van, a háromszög középvonalainak egyenesei. Lásd a 3.9M. feladatmegoldást!

3.1. A P_BAP_C háromszög egyenlő szárú, $AP_B = AP_C$, hiszen az AP_B szakasz AC egyenesre vonatkozó tükörképe AP, míg az utóbbi tükörképe AB-re AP_C. A Q pont illeszkedik a P_BP_C szakasz felezőmerőlegesére, ami – az egyenlő szárú háromszögben – egybeesik a P_BAP_C szög szögfelezőjével.

3.1.

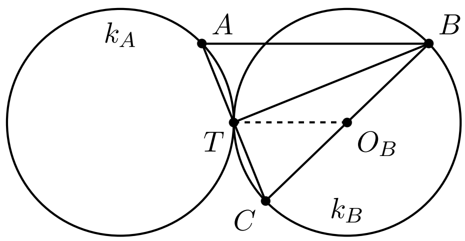
1. megoldás. Toljuk el az A, T pontokat a körök középpontja által meghatározott $\overrightarrow{O_A O_B}$ vektorral. Ennél a k_A adott kör képe a másik adott kör. k_B, az $A \in K_A$ pont képe legyen $A' \in K_B$, a $T \in K_A$ érintési pont képe $T' \in K_B$ (lásd az 1. ábrát).



3.1M1.1. ábra.

Mivel a TT' szakasz a k_B kör átmérője, így $TA'T'\angle = 90°$. Az AT szakasz párhuzamos a saját eltoltjával, $A'T'$-vel, így $ATA'\angle = 90°$, azaz $B = A'$. Az $AB = AA'$ szakasz hossza az eltolás vektorával azonos hosszúságú, azaz $2R$-rel egyenlő.

2. megoldás. Jelölje az A pont T-re középpontosan tükrözött képét C. A C pont a k_B körön van, mert ennél a tükrözésnél a k_A kör képe az azt T-ben érintő k_B kör (lásd az 1. ábrát). Mivel $90° = ATB\angle = CTB\angle$, így Thalesz tételének megfordítása szerint a CB szakasz a k_B kör átmérője.



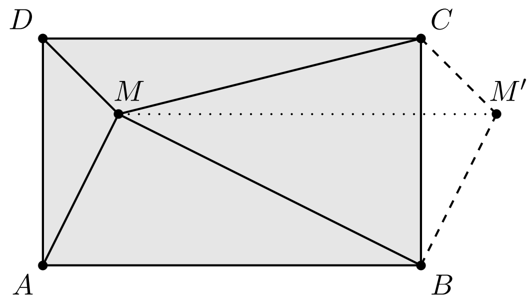
3.1M2.1. ábra.

Az ACB háromszögben TO_B középvonal, így $AB = 2TO_B = 2R$.

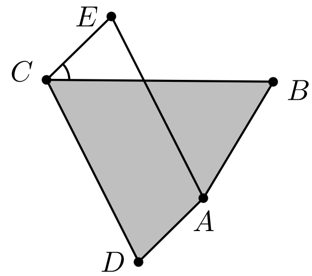
3.2. Legyen M' az M pont $\overrightarrow{AB}$ vektorral eltolt képe. Az MA, MD szakaszok eltoltja rendre $M'B$ és $M'C$ (lásd a **??**. ábrát), így az $MBM'C$ négyszög épp megfelel a kirótt követelményeknek.

3.3. Toljuk el a DA oldalt a $\overrightarrow{DC}$ vektorral a CE szakaszba (lásd a **??**. ábrát). Az $ECBA$ (az ábrán hurkolt) négyszög szerkeszthető, hiszen adott négy oldala és az egyik ($ECB\angle$) szöge. A CEA háromszögből egyértelműen adódik a $CEDA$ paralelogramma negyedik csúcsaként az A pont, tehát megkapjuk az $ABCD$ négyszöget.

Négy megoldása is lehet a feladatnak, de nem vállalkozunk rá, hogy elemezzük hány hurkolt négyszög lesz általában közöttük. Az $ECBA$ négyszöget úgy szerkesztjük, hogy felvesszük a BC szakaszt és C-be egy ezzel 45° bezáró egyenest. Ezen C-től DA távolaságban két pont (a **??**.



3.2M.1. ábra.



3.3M.1. ábra.

ábrán E_1 és E_2) is választható E-nek. Az E középpontú CD és a B középpontú BA sugarú körök középpontjaként adódik A. Erre akár négy lehetőség is van, a **??**. ábrán E_1-ből adódóan A_{11} és A_{12}, míg E_2-ből származik A_{21} és A_{22}.

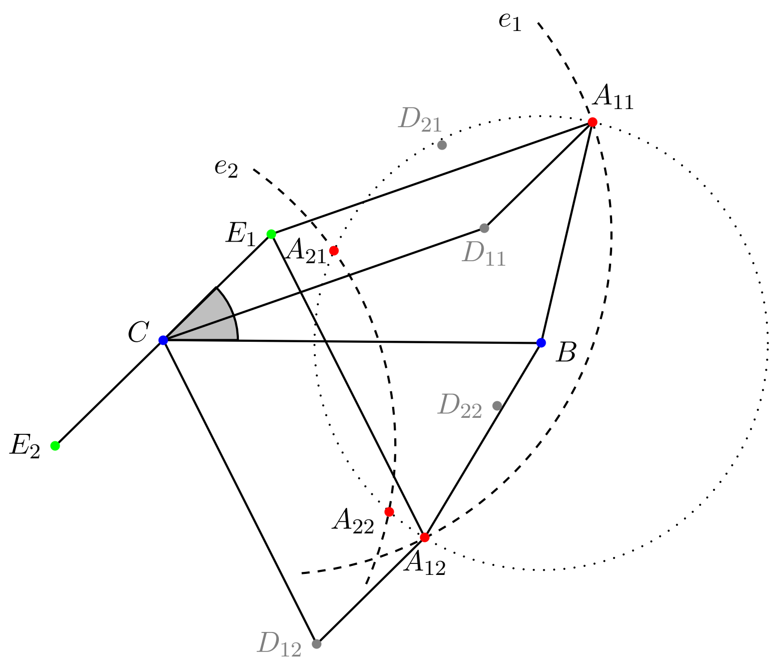
A konkrét adatokkal szerkesztve az egyik megoldás ($A_{12}BCD_{12}$) konvex, két másik ($A_{11}BCD_{11}$ és $A_{21}BCD_{21}$) konkáv, a negyedik hurkolt ($A_{22}BCD_{22}$)

3.4. a) Legyenek a körök k, l, az adott egyenes e, a körök e-re merőleges szimmetriatengelye e_k, e_l. Toljuk el az l kört e-vel párhuzamosan úgy, hogy e_l szimmetriatengelyének képe épp e_k legyen (lásd az 1. ábrát). Ha l képe l', akkor most az e_k egyenes és a k kör illetve az e_k-val azonos e_l' egyenes és az l' képkör közötti félhúroknak is egyenlő hosszúságúaknak kell lennie, tehát a k, l' körök metszépontjai közti húrt kell választani.

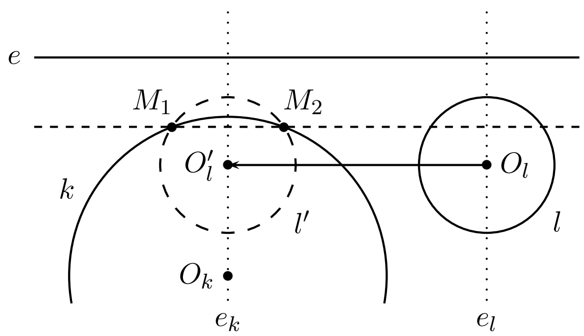
b) Az adott e egyenesirányt és az adott hossz helyett vegyünk fel a kettőt egyszerre megadó $\overrightarrow{v}$ vektort. Dolgozzunk eleve az a) feladat megoldásában kapott l' körrel, tehát essen egybe a k és az l' kör $\overrightarrow{v}$-re merőleges szimmetriatengelye. Induljunk ki a kész ábrából! Ha a két kör azonos egyenesre eső húrjainak összhossza a $\overrightarrow{v}$ vektor hosszával egyezik meg, akkor a szimmetriatengely egyik irányában az egyik kör félhúrja, a szimmetraitengely másik irányában a másik kör félhúrját épp az adott vektor hosszának felére egészíti ki (lásd a 2. ábrát). Toljuk el az l' kör egyik félkörét a $\frac{1}{2}\overrightarrow{v}$ vektorral és keressük meg hol metszi a k-kör ellenkező félkörét! A metszéspontokon átmenő $\overrightarrow{v}$-vel párhuzamos egyenesek adják a megoldást.

A megoldások száma a két kör elhelyezkedésétől és nagyságától függően 0, 1, 2 vagy ∞ lehet.

3.5. Az 1. ábrán az ABC háromszög, annak $\overrightarrow{BC}$ vektorral való eltoltja és az eltolt kép BC egyenesre vonatkozó tükörképe látható. Elég a BA szárat a C_1 ponttal eltolni és tükrözni. Az eltolás és a tükrözés is megtartja a szöget, tehát a BA, CA', CA'' egyenesek ugyanakkora szöget zárnak be a BC egyenessel. Ezt azt jelenti, hogy az A, B_1, C, C_1'', A'' pontok mind egy egyenesen vannak.



3.3M.2. ábra.

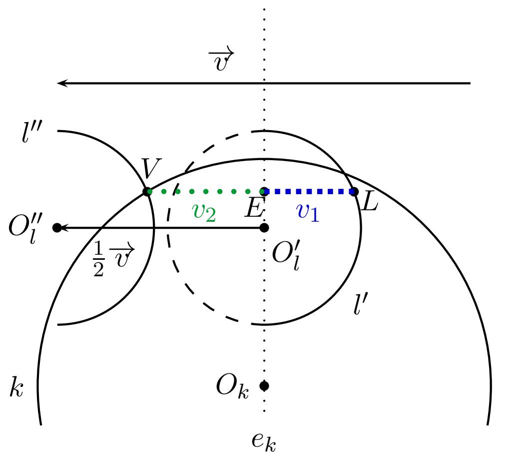


3.4M.1. ábra.

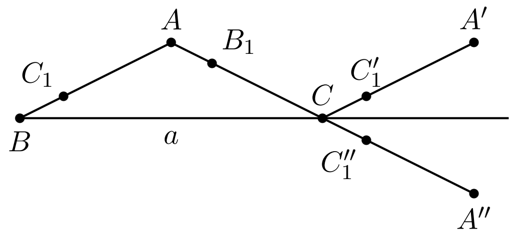
A szerkesztés innen már egyszerű. Toljuk el a C_1 pontot e_a-val párhuzamosan a távolságra (a két lehetséges irányítás közül a B_1 felé menőt választva) és a kapott C_1' pontot tükrözzük e_a-ra. Az így nyert C_1'' pontot B_1-gyel összekötő egyenes a szerkesztendő háromszög egyik szárának egyenese, e_A-val való metszéspontja C. A C pontra az előző eltolás ellentettjét alkalmazva kapjuk B-t és a BC_1 egyenes adja a másik szárt. Az így kapott háromszög alapja e_a-n van, hossza a, szárainak egyenesén vannak a megadott pontok, csak az nem egészen egyértelmű, hogy valóban egyenlő szárú, de könnyen igazolható. Valóban, a szerkesztés révén a C_1BCC_1' négyszög paralelogramma (BC, C_1C_1' oldalai párhuzamosak és egyenlő hosszúak), így C_1B, $C_1'C$ oldalai egyenlő szöget zárnak be a CB oldallal és ez a szög a tükrözés miatt a $C_1''CA$ egyenes és BC egyenes szögével is egyenlő, tehát a két szár az alappal egyenlő szöget alkot.

3.6.

1. megoldás. A BF_{AB} szakaszt a $\overrightarrow{BC}$ vektorral eltolva kapjuk a CF_1 szakaszt, míg az AF_{AB} szakaszt $\overrightarrow{AD}$ vektorral eltolva kapjuk a DF_2 szakaszt (lásd az 1. ábrát). Az eltolások miatt az $F_{AB}BCF_1$, $AF_{AB}F_2D$ négyszögek paralelogrammák, így pl $F_{AB}F_1 = BC$, $F_{AB}F_2 = AD$. A

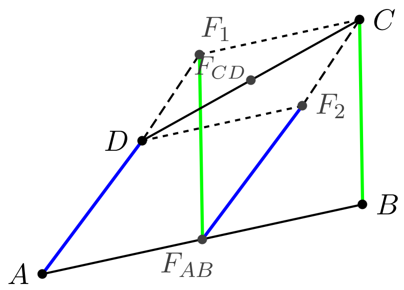


3.4M.2. ábra.



3.5M.1. ábra.

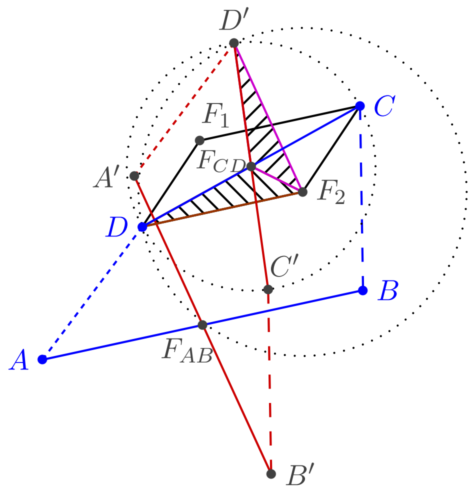
DF_2CF_1 négyszög is paralelogramma, hiszen CF_1 és DF_2 az egymással egyenlő hosszúságú és egy egyenesbe eső $F_{AB}B$ illetve AF_{AB} szakasszal párhuzamos és egyenlő hosszú. E paralelogrammában az F_{CD} pont az F_1F_2 átlónak is felezőpontja. Az $F_1F_2F_{AB}$ háromszög szerkeszthető (lásd az G.I.5.11. feladatot), hiszen adott két oldala és súlyvonala. Ezután szerkeszthető az F_1CF_2D paralelogramma, majd a $DAF_{AB}F_2$, BCF_1F_{AB} paralelogrammák.



3.6M1.1. ábra.

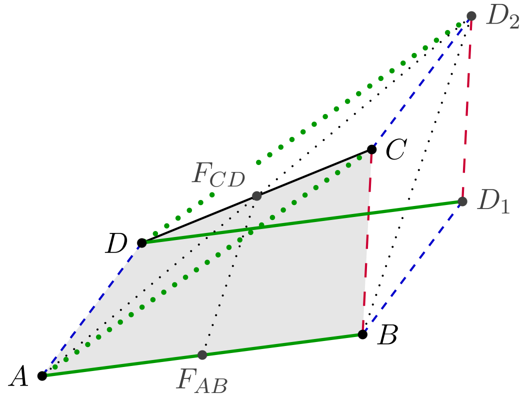
A paralelogrammák alkalmazásával a szerkesztés biztosítja, hogy F_{AB} valóban felezőpontja legyen az AB szakasznak és könnyen megmutatható, hogy a kapott négyszög oldalai és $F_{AB}F_{CD}$ szakasza is megfelelő hosszúságú.

A szerkesztést részletesen nem diszkutáljuk, de megjegyezzük, hogy általában nem csak egy négyszög szerkeszthető a megadott adatokból. Ha készen vagyunk az $F_{AB}F_1F_2$ háromszög szerkesztésével, akkor az F_1DF_2C paralelogramma ugyan egybevágóság erejéig (az $F_2F_{CD}F_1$ szimmetriatengelyre tükrösen) egyértelmű, de az F_{AB} ponthoz képesti elhelyezkedése más, így a folytatás is elágazik. A 2. ábrán pl két különböző megoldás jelenik meg.



3.6M1.2. ábra.

2. megoldás. Toljuk el az AD oldalt az $\overrightarrow{AB}$ illetve az $\overrightarrow{AC}$ vektorral! Így kapjuk a BD_1, CD_2 szakaszokat (lásd az 1. ábrát). Az eltolások miatt az ACD_2D, ABD_1D négyszögek paralelogrammák, így BD_1D_2C is paralelogramma. Az ACD_2D paralelogrammában F_{CD} az AD_2 szakasz felezőpontja is, így $F_{AB}F_{CD}$ középvonal az ABD_2 háromszögben, azaz $BD_2 = 2F_{AB}F_{CD}$.

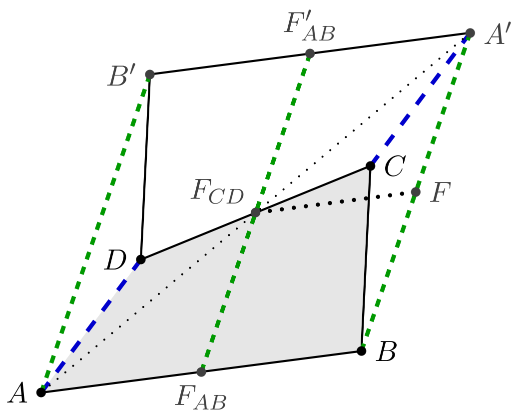


3.6M2.1. ábra.

A BD_2C háromszögnek mind a három oldala adott, így szerkeszthető, és folytatható a BCD_2D_1 paralelogrammává. A D pontot is megkaphatjuk, hiszen adott a C-től és a D_1-től mért CD illetve AB távolsága. Végül az A pontot a D csúcs $\overrightarrow{D_1B} = \overrightarrow{D_2C}$ vektorral való eltolásával kapjuk meg. A szerkesztés garantálja, hogy a kapott $ABCD$ négyszög oldalai megfelelő hosszúságúak. Az eltolás révén a szerkesztett ábrában az ACD_2D négyszög paralelogramma, így a CD oldal felezőpontja egyben az AD_2 szakasz felezőpontja is, így $F_{AB}F_{CD}$ szakasz középvonal lesz az ABD_2 háromszögben, tehát fele olyan hosszú lesz, mint a BD_2 szakasz, azaz hossza megfelelő. Lehet, hogy a megadott szakaszokkal a menet közben szerkesztendő háromszögek nem jönnek létre. Ha létrejönnek, akkor általában két megoldás van, mert a D pont a BD_1D_2C paralelogrammához képest két helyre kerülhet. Semmi sem garantálja azonban, hogy a kapott négyszög nem lesz hurkolt.

3. megoldás. Induljunk ki a kész ábrából! Tükrözzük középpontosan négyszögünket az F_{CD} pontra! Ilyenkor C és D egymásra képződik. Legyen A, B, F_{AB} képe rendre A', B' és F'_{AB}.

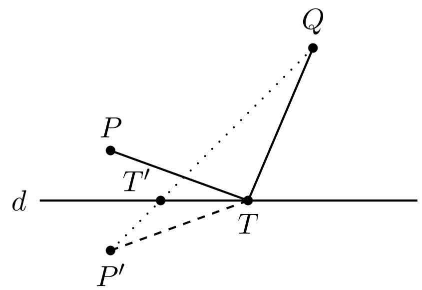
Az $AB'A'B$ négyszög középpontosan szimmetrikus, tehát paralelogramma, melynek AB', BA' oldalai párhuzamosak és egyenlőek az $F_{AB}F_{CD}$ „duplázásával” nyert $F_{AB}F'_{AB}$ középvonallal.



3.6M3.1. ábra.

A szerkesztés folyamán most F_{CD} előllítása közben kell két esetet megkülönböztetni, így két négyszög is megfelelhet a követelményeknek. Nehezen látható át, hogy egyáltalán mikor jönnek létre a kívánt alakzatok és hogy hurkolódik-e a kapott négyszög.

3.2. Legyen T a d egyenes tetszőleges pontja, P' a P pont d-re vonatkozó tükörképe és T' a $P'Q$ szakasz d egyenessel való metszéspontja (lásd az 1. ábrát).



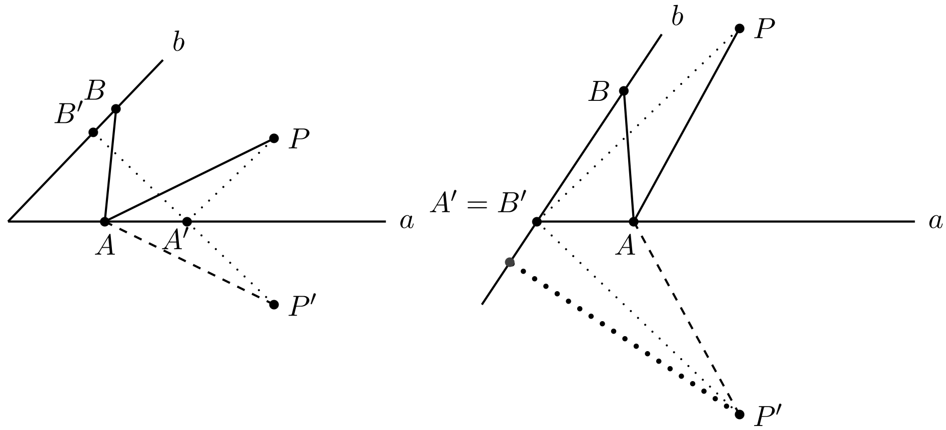
3.2M.1. ábra.

Állítjuk, hogy akkor kapjuk a legrövidebb töröttvonalat, ha a T' ponthoz megyünk a d egyenesen. Tehát azt akarjuk bizonyítani, hogy az 1. ábrán

$$PT' + T'Q < PT + TQ, \tag{1}$$

ha $T \neq T'$. Vegyük észre, hogy a tükrözés miatt $P'T = PT$ és $P'T' = PT'$, így $PT' + T'Q = P'T' + T'Q = P'Q$, míg $PT + TQ = P'T + TQ$ úgyhogy a bizonyítandó (1) egyenlőtlenség nem más, mint a háromszög-egyenlőtlenség a $P'QT$ háromszögben.

3.3. Legyen A a szög a szárának tetszőleges pontja, B a b szár egy pontja és jelölje P' a P pont a-ra vonatkozó tükörképét. A b szár P' ponthoz legközelebbi pontja legyen B'. A B' pont értelemszerűen a P' pontból a b szár egyenesére bocsájtott merőleges talppontja, ha ez magára a b szárra esik (lásd az 1. ábra bal oldalát), nem annak meghosszabbítására, illetve a B' pont a szög csúcsa, ha a talppont kívül van a száron (az 1. ábrán jobb oldalon). Végezetül legyen A' a PB' szakasz és az a szár metszéspontja, ami természetesen megegyezik B'-vel, ha az a szög csúcsa.



3.3M.1. ábra.

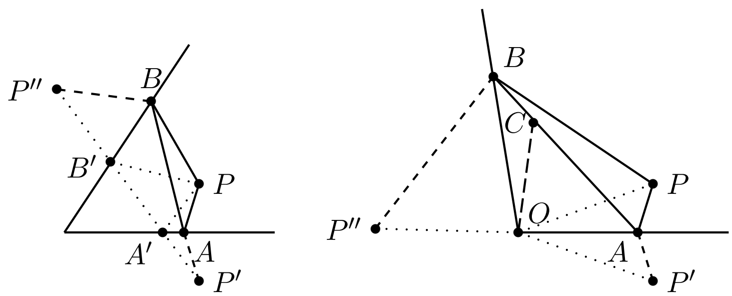
Állítjuk, hogy a legrövidebb töröttvonal a $PA'B'$, azaz az 1. ábrán

$$PA' + A'B' < PA + AB. \qquad (1)$$

Valóban, most a tükrözés révén $PA' = P'A'$ és $PA = P'A$, így $P'A' + A'B' = P'B'$, míg $PA + AB = P'A + AB$, de P' és a b szár között a legrövidebb töröttvonal a PB' szakasz, minden más hosszabb nála.

3.4. Ha P' illetve P" a P pontnak az a szár egyenesére illetve a b szár egyenesére vonatkozó tükörképe, akkor a 3.1. feladat megoldása szerint $OP' = OP'' = OP$ és $P'OP''\sphericalangle = 2\gamma$, ahol γ az a, b szárak szöge.

Két esetet különböztetünk meg aszerint, hogy $\gamma < 90°$ vagy $\gamma \geq 90°$ (lásd az 1. ábrát).



3.4M.1. ábra.

Az első esetben a P pontot is tartalmazó $P'OP''$ szögtartomány konvex, a $P'P''$ szakasz elmetszi az a, b szárakat. Legyenek a metszéspontok A' és B' (lásd az 1. ábrát). Megmutatjuk, hogy $PA'B'P$ a legrövidebbb töröttvonal. Legyen $PABP$ egy tetszőleges másik töröttvonal. A tükrözés miatt $PA = P'A$, $PB = P''B$, $PA' = P'A'$, $PB' = P''B'$, így $PA + AB + BP = P'A + AB + BP'$, míg $PA' + A'B' + B'P = P'A' + A'B' + B'P'' = P'P''$, tehát a $PABP$ töröttvonal egyenlő hosszúságú egy valahol biztosan megtörő P' és P'' közti töröttvonallal, míg $PA'B'P$ a $P'P''$ szakasszal egyenlő hosszú. Ebben az eetben tehát megleltük a legrövidebb töröttvonalat.

Most vizsgáljuk a $\gamma \geq 90°$ esetet. Ilyenkor az $A' = B' = O$ pontokhoz tartozó $PA'B'P$ azaz $POOP$ elfajult töröttvonal adja a minimumot.

Tekintsük most a $P'P''$ szakasz felezőmerőlegesét. Állítjuk, hogy ez az O ponttól a $P'P''$ szakasz felezőpontjával ellenkező irányban kettévágja az adott szögtartományt. Legyen $P'OP\angle = 2\alpha$, $POP''\angle = 2\beta$ és állítsunk az a szárral β szöget bezáró szögszárat O-ból. Ugyanezt a szögszárat kapjuk, ha az ellenkező irányban a b szárral α szöget bezáró szögszárat állítunk O-ból, hiszen $(\alpha+\beta)+(\alpha+\beta) = 2\alpha+2\beta$. Így ez a szögszár épp a tekintettbe vett felezőmerőlegesnek az a, b szárak közti szögtartományba eső része. Azért van a felezőmerőlegesen, mert O is azon van és az OP',OP'' egyenesekkel azonos szöget zár be, és azért van a szögtartományban, mert annak határaitól az a, b szárak $\alpha + \beta$ szögétől kisebb szöget mértünk fel, mikor a szögekkel képeztük.

Tekintsünk egy tetszőleges $PABP$ töröttvonalat. Ha A és B egyike megegyezik Oval, a másik különbözik tőle, akkor könnyen igazolható, hogy a POP töröttvonal rövidebb nála. A $P'P''$ szakasz felezőmerőlegesének egyik oldalán van az a, másikon a b szögszár, így ha A és B is különbözik O-tól, akkor a felezőmerőleges egy belső C pontjában metszi el az AB szakaszt. Ekkor

$$PA + AB + BP = P'A + AC + CB + BP'' > P'C + CP'' > P'O + OP'' = PO + OP,$$

ahol az első egyenlőtlenség az $P'AC$, $P''BC$ háromszögekre vonakozó háromszögegyenlőtlenség miatt áll fenn, a második pedig a 9.1. feladat állítása miatt.

3.5. Mozgassuk a P_A pontot a BC egyenesen és minden helyzetében keressük a 3.4. feladatnak megfelelően azokat a $P_B \in AC$, $P_C \in AB$ pontokat, amelyekre a $P_AP_BP_CP_A$ töröttvonal hossza minimális. Ott láttuk, hogy alapvetően két lényegesen különböző eset van és az esetszétválasztás nem a P_A pont helyzetén múlik, hanem a $BAC\angle = \gamma$ szög nagyságán.

Ha $\gamma < 90°$, akkor képezzük a P_A pont AB illetve AC egyenesre vonatkozó P' illetve P'' tükörképét és a legrövidebb P_A-t tartalmazó záródó töröttvonal hossza a $P'P''$ szakasz hosszával lesz egyenlő, és ez a szakasz kimetszi az AB, AC oldalakon a minimumot szolgáltató P_C, P_B pontokat.

A 3.1. feladatban láttuk, hogy a $P'AP''$ háromszög mindig egyenlő szárú és a szárak szöge mindig 2γ, tehát ez a háromszög a P_A pont különböző választásai esetén egymáshoz mindig hasonló. Az AP', AP'' szárak az AP_A szakasz hosszával egyeznek meg, így a töröttvonal $P'P''$-vel egyenlő hossza is akkor lesz minimális, ha AP_A hossza minimális. Az AP_A szakasz hossza szigorúan monoton fogy, ahogy P_A-val közelítünk az ABC háromszög A-ból induló magasságának talppontjához. Így ha az ABC háromszög B-nél és C-nél fekvő belső szögei is hegyesszögek, akkor AP_A pontosan abban az esetben minimális, ha P_A az A-ból induló magasság talppontja, míg ha a BC oldal egyik csúcsánál tompaszög van, akkor a P_A pontot ide kell tennünk. Az utóbbi esetben P_B és P_C közül az egyik is ez a csúcs, a másik pedig ennek a csúcsnak a szemközti oldalra vonatkozó tükörképe lesz, tehát a minimális kerületű háromszög elfajul, a tompaszöghöz tartozó dupla magasságot kapjuk.

Ha $\gamma \geq 90°$, akkor a 3.1. feladat megoldásában leírtak szerint a $P_B = P_C = A$ esetben lesz a minimum, tehát a minimális összhosszt adó töröttvonal az elfajult P_AAP_A háromszög. P_A változtatásával ez úgy tehető a legrövidebbé, ha P_A-nak az A-ból induló magasság talppontját választjuk.

Tompaszögű háromszögben tehát a minimális kerületet adó háromszög elfajult: a tompaszög csúcsához tartozó dupla magasság, míg hegyesszögű háromszög esetén mindegyik oldalon a magasság talppontját kell választani, tehát a talpponti háromszög adja a minimumot.

3.8.

1. megoldás. Ha az eredeti háromszög derékszögű, akkor a talpponti háromszög elfajult, két egybeeső csúcsa a derékszögű csúcs, harmadik csúcsa a derékszögű csúcsból induló magasság talppontja az átfogón. Ennek dupla oldalegyenesét, az eredeti háromszög átfogóhoz tartozó magasságának egyenesét az átfogóra vonatkozó tükrözés egymásba, azaz önmagába viszi. A talpponti háromszög további oldalpárjairól nem érdemes beszélni.

A 3.5. feladat megoldásában azt kaptuk, hogy egyetlen háromszög adja a minimumot és ezt – ha az eredeti háromszög hegyesszögű – úgy kapjuk, hogy az A-ból induló magasság T_A talppontját tükrözzük az AB, AC oldalakra, és képezzük a T'_A, T''_A tükörképek AB, AC oldalakkal való T_C, T_B metszéspontjait. Az így kapott $T_AT_BT_C$ háromszög szolgáltatja a minimumot. Ebben tehát T_A a magasság talppontja, de ha eredetileg más oldalból indulunk ki, akkor levezethető, hogy ott is a talppont szolgáltatja a minimumot, tehát $T_AT_BT_C$ a talpponti háromszög.

A T_BT_C egyenes AC oldalegyenesre vonatkozó tükörképe természetesen átmegy a $T_B \in AC$ ponton és a szerkesztés miatt a T_A ponton is, tehát a talpponti háromszög egyik oldalegyenesének képe egy másik oldalegyenese. Ezt kellett igazolni.

Ha az ABC háromszögben A-nál tompaszög van, akkor térjünk át az MBC háromszögre, ahol M az ABC háromszög magasságpontja, amely már hegyesszögű (lásd az 1.7. feladatot). Az MBC háromszög magasságvonalainak talppontjai megegyeznek az ABC háromszög magasságainak talppontjaival (1.6. feladat). A fenti – a hegyesszögű háromszögre vonatkozó – eredmény szerint az MBC háromszög oldalegyeneseire vonatkozó tükrözések a $T_AT_BT_C$ talpponti háromszög oldalegyeneseit páronként egymásba képezik. Így például a T_BT_C, T_CT_A egyeneseket a metszéspontjukon átmenő MC egyenesre való tükrözés egymásba viszi. Az MC, AB egyenesek a T_C pontban egymásra merőlegesek, az ezekre való tükrözések pontosan ugyanúgy képezik egymásra a T_C-n átmenő egyeneseket. Tehát azt állítjuk, hogy ha e-nek MC-re vonatkozó tükörképe e' és e'-nek az AB-re való tükörképe e'', akkor e és e'' megegyezik. Ez valóban igaz, mert e-ből e'' a két tükrözés egymás utáni elvégzésével kapható, tehát egy T_c-re való középpontos tükrözéssel. A középpontos tükrözés a T_c középpontján átmenő egyeneseket ömagára képezi: $e = e''$.

Tehát az AB egyenesre tükrözve a T_BT_C, T_CT_A egyenesek egymásba képződnek és hasonlóan igazolható, hogy az AC-re vonatkozó tükrözés egymásba viszi a T_BT_C, T_AT_B egyeneseket, míg a BC egyenes az MBC háromszögnek eleve oldalegyenese tehát rá vonatkozólag már nem is kell igazolni a megfelelő állítást. Ezzel tompaszögű háromszögre is megoldottuk a feladatot.

2. megoldás. A BC oldalegyenesre vonatkozó tükrözés pontosan akkor képezi egymásra a T_AT_C, T_AT_B egyeneseket, ha azok ugyanakkora szöget zárnak be vele, azaz ha

$$T_CT_AB\sphericalangle \equiv CT_AT_B\sphericalangle \quad (\text{mod } 180^\circ). \tag{1}$$

A BM szakasz Thalesz körére illeszkedik a T_A és a T_C talppont. E kör BT_C húrjának kerületi szögei:

$$T_CT_AB\sphericalangle \equiv T_CMB\sphericalangle \quad (\text{mod } 180^\circ), \tag{2}$$

míg a CM szakasz T_A-t és T_B-t taratlmazó Thalesz körén az CT_B húr kerületi szögei:

$$CT_AT_B\sphericalangle \equiv CMT_B\sphericalangle \quad (\text{mod } 180^\circ). \tag{3}$$

A CMT_C egyenes és a BMT_B egyenes szöge áll (2) és (3) jobb oldalán is, tehát az ezekben látható bal oldalak is egyenlők egymással, amivel igazoltuk is a (1) összefüggést.

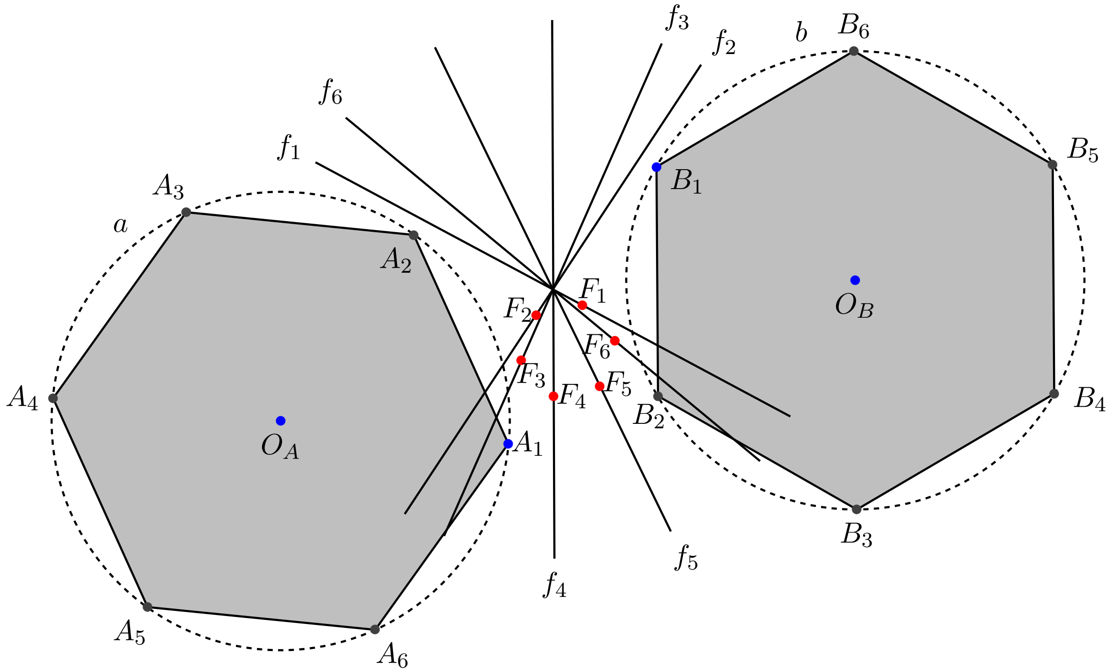
Hasonlóan igazolható, hogy a háromszög többi oldalára való tükrözés is egymásba viszi a talpponti háromszög megfelelő oldalegyeneseit.

3.1. a) Figyeljük meg az 1. ábrát illetve az internetes változatban a hozzá tartozó animációt!

Az oldalfelezőmerőlegesek egy ponton mennek át, a felezőpontok pedig szabályos hatszöget alkotnak.

b) Figyeljük meg a 2. ábrát illetve az internetes változatban a hozzá tartozó animációt!

A felezőpontok mintha illeszkednének egy egyenesre. A felezőmerőlegesek rendszere első megközelítésben nem mutat különösebb szabályosságot.



3.1M.1. ábra.

3.2. A két egyenes irányított szögére, illetve a két irányított egyenes irányított szögére:
a) $ee'\sphericalangle \equiv \gamma \pmod{1}80°$;
b) $ee'\sphericalangle \equiv \gamma \pmod{3}60°$.

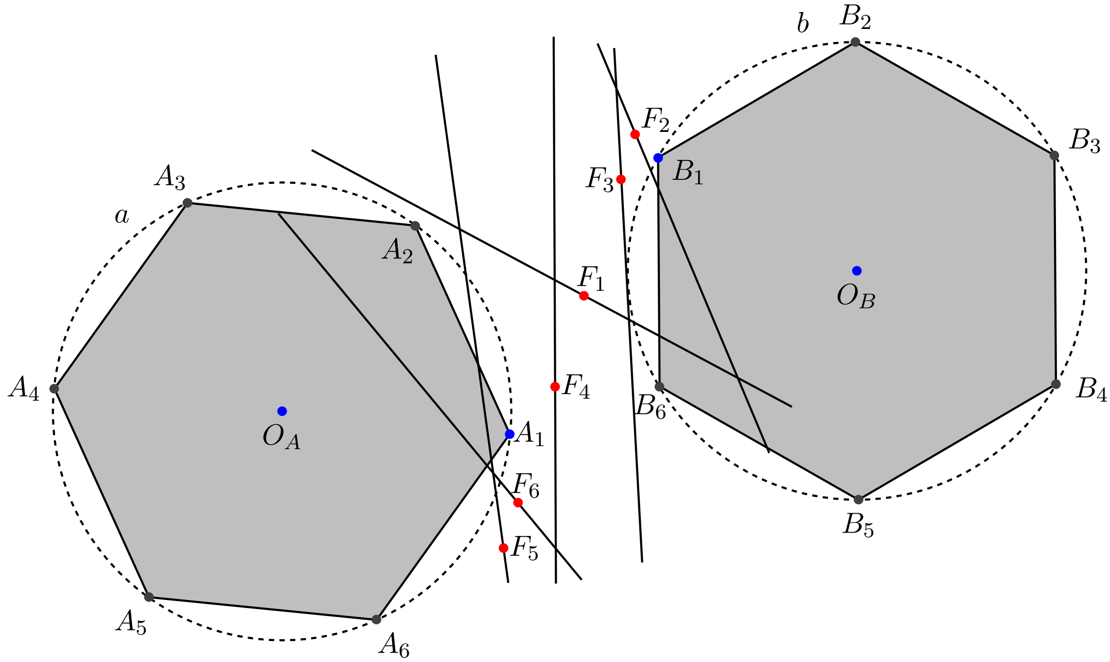
3.3. A két egymásnak megfelelőpont egyforma messze van a forgási középponttól, így az rajta van a felezőmerőlegesükön.

3.4. Legyenek az egyik háromszög csúcsai pozitív forgásirányban A, B és C. A forgatás körüljárástartó, így ha A, B és C képei egy forgatásnál A', B' és C', akkor az $A'B'C'$ háromszög is pozitív körüljárású. Ezt figyelembe véve írjuk a másik háromszög csúcsaira pozitív körüljárásban az A', B', C' betűket! Ezt háromféleképpen tehetjük meg, hiszen az A' betűt akármelyik csúcsra írhatjuk, a többi betű pedig a betűsorrend és a körüljárás rögzítése miatt adott. Annak a forgatásnak a középpontja, amely A-t A'-be képezi az A, A' pontoktól egyforma messze van, tehát a felezőmerőlegesükre illeszkedik. Ugyanezért a forgatás centrumának a BB' szakasz felezőmerőlegesére és a CC' szakaszéra is illeszkednie kell, tehát az O forgáscentrum – ha van egyáltalán ilyen, akkor – e három felezőmerőleges metszéspontja.

Ha ez a három felezőmerőleges egybeesne, akkor az erre az egyenesre való tükrözés az A, B,C pontokat rendre az A', B', C' pontokba vinné, de a tükrözés irányításváltó, így ez nem lehetséges.

Van tehát két felezőmerőleges, feltehetjük, hogy az AA' és a BB' szakaszoké, amelyik nem esik egybe. E két felezőmerőlegesnek van közös pontja, mert ha párhuzamosak lennének, akkor az AA', BB' szakaszok is párhuzamosak lennének, és így az $AA'B'B$ négyszög paralelogramma vagy húrtrapéz lenne. Paralelogramma nem lehet, mert AB és $A'B'$ nem párhuzamos és húrtrapéz sem lehet, mert AA' és BB' felezőmerőlegese nem esik egybe.

Jelölje tehát e két felezőmerőleges egyetlen közös pontját O. Meg szeretnénk mutatni, hogy



3.1M.2. ábra.

megfelelő szögű O körüli forgatás az ABC háromszöget az $A'B'C'$ háromszögbe viszi.

Tekintsünk két transzformációt, az AA' szakasz t felezőmerőlegesére vonatkozó tükrözést, valamint azt az O centrumú ϕ forgatást, amely A-t A'-be viszi. Legyen $t(B) = B_1$ és $\phi(B) = B_2$. Azt szeretnénk megmutatni, hogy $B_2 = B'$, sőt $\phi(C) = C'$.

Tekintsük az OAB, $OA'B'$ háromszögeket. A felezőmerőlegesek miatt $OA = OA'$ és $OB = OB'$, míg ABC és $A'B'C'$ egybevágósága miatt $AB = A'B'$, tehát ez a két háromszög egybevágó.

A t tükrözésnél OAB képe $OA'B_1$, míg ϕ-nél $OA'B_2$. Az $OA'B'$ háromszög tehát egybevágó az $OA'B_1$, $OA'B_2$ háromszögekkel is és két csúcsa egybeesik vele, tehát megegyezik a két háromszög egyikével. Nem egyezik meg $OA'B_1$-gyel, mert abban AA' és BB_1 felezőmerőlegese egybeesik. Tehát $OA'B_2$-vel egyezik meg, azaz $B_2 = B'$, ahogy állítottuk.

Az ABC háromszög ϕ forgatásnál származó képe és az $A'B'C'$ háromszög megegyezik két csúcsban $\phi(A) = A'$-ben és $\phi(B) = B'$-ben. Ezen kívül oldalaik hossza, tehát szögeik nagysága és körüljárásuk is megegyezik, így harmadik csúcsuk is egybeesik: $\phi(C) = C'$. Ezzel megmutattuk, hogy a ϕ forgatás az ABC háromszöget az $A'B'C'$ háromszögbe viszi.

3.5. Az O forgási középpont a forgatás egyetlen fixpontja, ezért nem lehet két különböző O pont. A forgatás szöge adott, így a forgatás egyértelmű, ha egyáltalán létezik.

Legyen t_1 az AB szakasz felezőmerőlegese és t_2 az a 3.5. feladat szerint létező és egyértelmű egyenes B-n át, amelynek t_1-gyel bezár előjeles szöge $\frac{\gamma}{2}$-vel egyenlő $\pmod{180°}$. A t_1-re és t_2-re való tükrözések szorzata a metszéspontjuk körüli $2\frac{\gamma}{2} = \gamma$ szögű elforgatás, tehát létezik is a kérdezett transzformáció.

4. Egybevágósági transzformációk kompozíciója

4.1. Először az egyértelműséget („kétértelműséget”) igazoljuk, utána pedig a transzformációk létezését mutatjuk meg.

Legyen C tetszőleges, az AB egyenesre nem illeszkedő pont. A C pont képe, C', a távolságtartás ismeretében könnyen szerkeszthető: az A' középpontú AC sugarú és a B' középpontú BC sugarú körök metszéspontja lesz. A két körnek két metszéspontja van, tehát C'-re is két lehetőségünk van az $A'B'$ egyenesre tükrösen. Válasszuk ki ez egyik lehetőséget. Ha D tetszőleges további pont, akkor az AD, BD távolságok figyelembevétele alapján D'-re is két lehetőség van, melyek az $A'B'$ egyenesre tükrösek. Ez a két lehetséges D' pont a választott C' ponttól különböző távolságban van, hiszen a D'-ktől egyforma távoslágban elhelyezkedő pontok az $A'B'$ egyenesen vannak. Mivel $CD = C'D'$ így csak az egyik D' pont lehet jó. Ezek szerint C' választása után már az összes többi pont képe egyértelmű, ha egyáltalán lehetséges egybevágóságot értelmezni.

Megadunk megfelelő egybevágóságot két ill. három tengelyes tükrözés kompozíciójaként. Legyen az első tükörtengely, t_1, az AA' szakasz felezőmerőlegese. Legyen a $t_1(B) = B_1$. Legyen a második tükörtengely, t_2, a B_1B' szakasz felezőmerőlegese, ha $B_1 \neq B'$, illetve legyen $t_2 = A'B'$, ha $B_1 = B'$. A t_2 tengelyre illeszkedik A' hiszen egyforma messze van B_1-től és B'-től. A $t_2 \circ t_1$ transzformáció (előbb tükrözünk t_1-re, majd t_2-re olyan irányítástartó transzformáció, amely az A pontot A'-be, B-t pedig B'-be képzi. Legyen t_3 az $A'B'$ egyenes. A $t_3 \circ t_2 \circ t_1$ transzformáció is A'-be viszi A-t, B'-be B-t, de ez irányításváltó.

Ezzel az állítást igazoltuk.

4.4. Fixpont nincs, az egyetlen fixegyenes a tengely.

4.6. Koncentráljunk először csak arra, hogy A az A'-be kerüljön. A 4.5. feladat szerint a csúsztatva tükrözés tengelyének át kell mennie az AA' szakasz F felezőpontján. Ha választunk egy tetszőleges t tengelyt F-en át, akkor találhatunk hozzá egy olyan eltolást, hogy a két transzformációból álló csúsztatva tükrözés A-t A'-be képezze. Valóban, az A pont, annak t-re tükrözött A^* képe és az A' pont meghatározta háromszögben t középvonal, mert átmegy AA' és AA^* felezőpontján is, így az $\overrightarrow{A^*A'}$ vektor párhuzamos t-vel, azaz együtt t tengelyű csúsztatva tükrözést határoznak meg.

Térjünk át a megfelelő tengely kiválasztására. Az eltolás nem változtatja az egyenes állását, tehát a csúsztatva tükrözés tükrözésének az a egyenest a'-vel párhuzamos egyenesbe kell képeznie. Egy tengely pontosan akkor megfelelő erre a célra, ha párhuzamos az a, a' egyenesek valamelyik szögfelezőjével, ha azok metszik egymást, illetve ha párhuzamos vagy merőleges rájuk, ha azok párhuzamosak egymással.

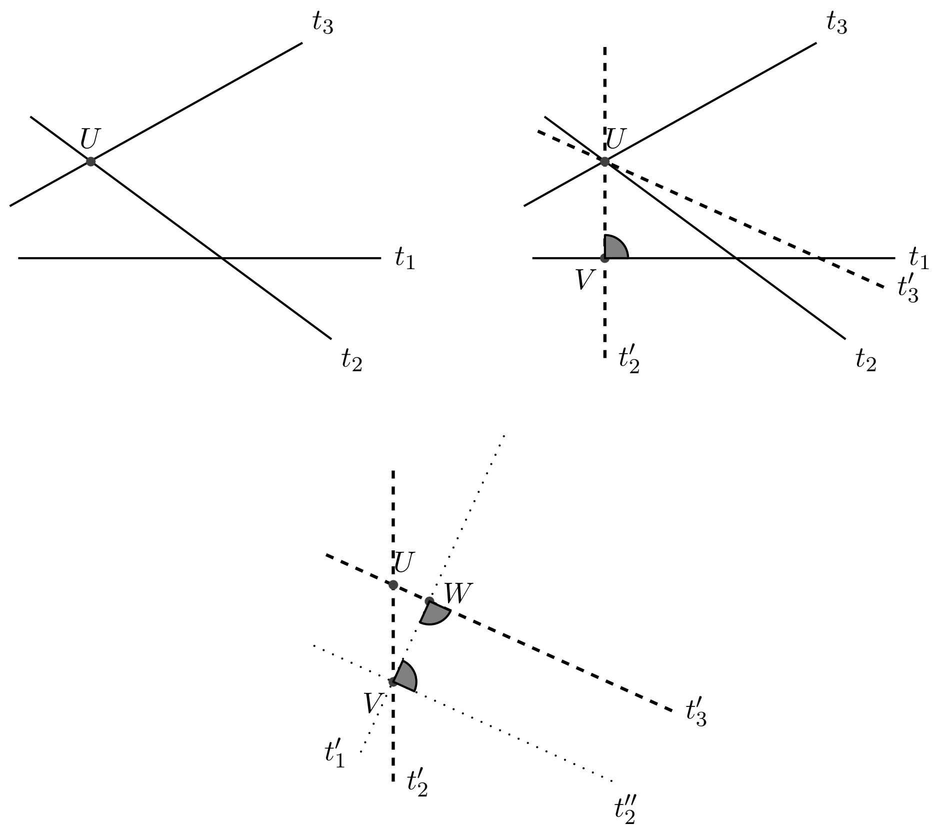
A két említett irány bármelyikében választhatjuk a t tengelyt F-en át találunk hozzá olyan eltolást, amely A-t A'-be képező csúsztatva tükrözéssé egészíti ki. Ez egyúttal a-t a'-be viszi, mert a képegyenes megfelelő ponton $A' \in a'$ megy át és megfelelő irányú $t(a) \parallel a'$.

Tehát két csúsztatva tükrözés felel meg a követelményeknek. Ha az A, A' pontok egybeesnek, akkor mindkét csúsztatva tükrözés egyszerű tükrözéssé fajul. Ha pedig A és A' különbözők, de $a\,AA' \equiv AA'\,a' \pmod{180°}$, akkor az egyik csúsztatva tükrözés egyszerű tükrözés.

4.7. Ha a t_1, t_2, t_3 tengelyek egy ponton mennek át vagy mind párhuzamosak, akkor t_2 és t_3 elforgatható vagy eltolható a t_2', t_3' egyenespárba úgy, hogy t_2' egybeessen t_1-gyel. Ilyenkor $t_3 \circ t_2 \circ t_1 = t_3' \circ t_2' \circ t_1 = t_3' \circ t_1 \circ t_1 = t_3'$.

Ha a három tengely nem megy át egyközös ponton és nem is mind párhuzamosak egymással, akkor t_2 és t_3 vagy eleve metszi egymást, vagy csak t_1 és t_2 metszi egymást, de akkor ezek elforgathatók a metszéspontjuk körül, hogy t_2 képe messe t_3-at. Ezek után feltehetjük, hogy a t_2, t_3 tengelyek egy olyan U pontban metszik egymást, amelyen nemmegy át a t_1 tengely(lásd az 1. ábrát). Forgassuk el U körül t_2-t és t_3-at a t_2', t_3' tengelyekbe úgy, hogy t_2' merőleges legyen t_1-re. Most $t_3' \circ t_2' = t_3 \circ t_2$, hiszen a két tengelyes tükrözés kompozíciója csak a tengelyek metszéspontjától és szögétől függ. Jelölje t_2' és t_1 metszéspontját V. A V pont nem illeszkedik t_3'-ra, egyrészt mert V nem az U pont, hiszen t_1-en van, másrészt mivel V a t_2' tengelyen van és a t_2', t_3' tengelyek különböznek, ha t_2 és t_3 is különböző.

Forgassuk el V körül t_2'-t és t_1-et a t_2'', t_1' tengelyekbe úgy, hogy t_1' merőleges legyen t_3'-ra és így t_1'' párhuzamos legyen azzal. Most $t_2'' \circ t_1' = t_2' \circ t_1$, így $t_3' \circ t_2'' \circ t_1' = t_3 \circ t_2 \circ t_1$. Itt t_2'' és t_3' különbözők, hiszen V illeszkedik t_2''-re, de t_3'-ra nem. Így a $t_3' \circ t_2'' \circ t_1'$ csúsztatva tükrözés, melynek tengelye t_1' és eltolása a $t_3' \circ t_2''$.



4.7M.1. ábra.

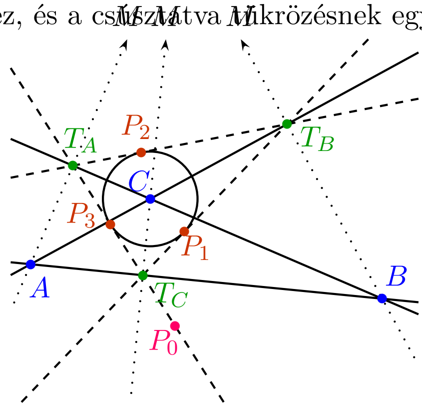
4.11. a) Tekintsük a három oldalfelező merőlegesre való tükrözés kompozícoióját. A 4.7. feladat eredménye szerint ez aszerint tükrözés vagy csúsztatva tükrözés, hogy a három tengely egy ponton megy át (párhuzamos is lehet) vagy nem. Az adott esetben a kompozíciónak fixpontja az egyik csúcs (a háromszög csúcsait körbejárva visszatér eredeti helyéhez), így a transzformáció nem lehet csúsztatva tükrözés (4.4. feladat). Ezek szerint a három oldalfelező merőleges egy ponton megy át vagy párhuzamosak.

b) A három szögfelezőre vonatkozó tükrözés kompozíciójánál az egyik oldal önmagába képződik, de irányítása megfordul. Csúsztatva tükrözésnél azonban az egyetlen fixegyenes a tengely, aminek nem fordul meg az irányítása. Így az a) részben alkalmazott elvek használhatók itt is.

4.12. a) A kompozíció csúsztatva tükrözés, hiszen a három oldalegyenes nem megy át egy ponton.

Ismeretes, hogy a talpponti háromszög oldalegyeneseit az eredeti háromszög oldalegyenesei páronként egymásra tükrözik: a T_CT_A, T_CT_B egyenesek egymásra képződnek a c egyenesre, mint tengelyre való tükrözéskor és ehhez hasonlóan T_CT_B és T_AT_B illetve T_AT_B és T_AT_C is egymás képei a b-re illetve az a ra való tükrözéskor (lásd a 3.8. feladatot).

Ebből következik, hogy a T_CT_A egyenes a csúsztatva tükrözés tengelye, hiszen ezt egymás után sorban c-re, b-re majd a-ra tükrözve rendre a T_CT_B, T_AT_B, T_CT_A egyeneseket kapjuk, tehát visszajutunk az eredetihez, és a csúsztatva tükrözésnek egyetlen fixegyenese van.



4.12M.1. ábra.

b) Tekintsük a C pont köré írt, a talpponti háromszög oldalegyeneseit érintő i kört (lásd az 1. ábrát).

Aszerint, hogy az eredeti háromszög C-nél, B-nél vagy A-nál tompaszögű vagy hegyesszögű, az i kör a rendre a talpponti háromszög beírt köre, T_BT_C, T_AT_C illetve T_AT_B oldalához hozzáírt köre.

Tekintsük az i kör és a T_BT_C egyenes P_1 érintési pontját. Az i kör középpontján átmenő b egyenesre vonatkozó tükrözés ezt i és a T_BT_A egyenes P_2 érintési pontjába képezi. A szintén i középpontján átmenő a egyenes ezt a T_CT_A egyenes és az i kör P_3 érintési pontjába viszi. A P_3 pont a P_1 pont T_CC egyenesre vonatkozó tükörképe. Jelölje P_0 a P_1 pontnak a T_CC egyenesre T_C-ben merőleges c egyenesre vonatkozó tükörképét. A származtatás miatt P_0-ból P_3 kétféleképpen is megkapható: egyrészt T_C pontra vonatkozó középpontos tükrözéssel, másrészt a c, b, a egyenesekre való tükrözések egymás utáni alkalmazásával.

A csúsztatva tükrözés eltolásvektora tehát a $\overrightarrow{P_0P_3} = 2\overrightarrow{T_CP_3}$ vektor, amelynek hossza a T_C pontból az i körhöz húzott érintő duplája. Aszerint, hogy az eredeti háromszög C-nél, B-nél vagy A-nál tompaszögű vagy hegyesszögű ez rendre

$$(-T_AT_B + T_BT_C + T_CT_A), \qquad (T_AT_B + T_BT_C - T_CT_A),$$

$$(T_AT_B - T_BT_C + T_CT_A), \qquad (T_AT_B + T_BT_C + T_CT_A).$$

4.13.

1. megoldás. Az AC átló E és a BD átló F felez?pontja mellett tekintsük a BC oldal G felez?pontját is. A CBA háromszögben GE középvonal párhuzamos AB-vel és feleakkora, mint AB, míg a CBD háromszögben GF párhuzamos CD-vel és feleakkora, mint CD. A GEF háromszög GE, GF oldalai egyenl?ek, hiszen AB és CD is egyenl?ek, ráadásul a párhuzamosságok miatt a száraknak az alappal bezárt szöge épp az EF egyenesnek az AB, CD oldalegyenesekkel bezárt szögével egyezik meg.

2. megoldás. Az AB-t a CD-be képez? irányításváltó transzformáció egy csúsztatva tükrözés. A csúsztatva tükrözésnél bármely pontot a képével összeköt?s szakasz felez?pontja a tükrözés tengelyén van. Ennek megfelel?en most az EF egyenes a tengely. Az EF-fel párhuzamos eltolás és az EF-re való tükrözés megtartja AB és EF szögét.

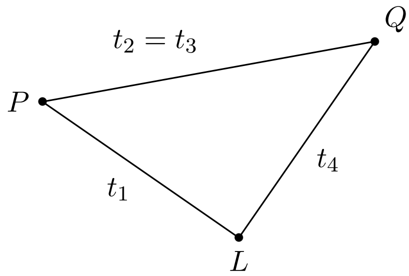
4.1.

1. megoldás. [3]

Tekintsük a P pont körüli 90°-os és a Q pont körüli 90°-os forgatásokat és ezek

$$Q^{90} \circ P^{90} \tag{1}$$

kompozícióját. A (1) jelölést jobbról kell olvasni: először a P körüli forgatást végezzük el. A P pont körüli 90°-os elforgatás két olyan tengelyes tükrözéssel helyettesíthető, amely tengelyek egymást P-ben 45°-ban metszik. Pontosítás: az első tengelytől (t_1) a második tengelyig (t_2) mért irányított szög 45°-os. Vegyük fel ezt a ké ttengelyt úgy, hogy a második épp Q-n menjen át. A Q körüli 90°-os elforgatást helyettesítő tengelyeket pedig úgy vegyük fel, hogy az első (t_3) menjen át P-n (lásd az 1. ábrát).



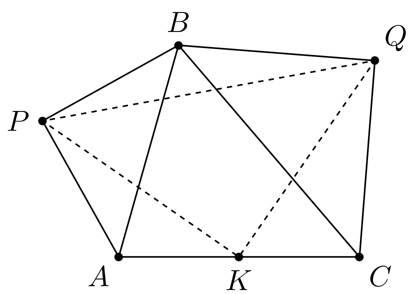
4.1M1.1. ábra.

Az így kapott t_1, t_2, t_3, t_4 tengelyekkel

$$Q^{90} \circ P^{90} = (t_4 \circ t_3) \circ (t_2 \circ t_1) = t_4 \circ (t_3 \circ t_2) \circ t_1 = t_4 \circ t_1, \tag{2}$$

tehát az eredő transzformáció a t_1, t_4 tengelyek L metszéspontjára vonatkozó középpontos tükrözés, hiszen e két tengely szöge 90°.

Az $Q^{90} \circ P^{90}$ transzformációnál az A csúcs képe C, hiszen $P^{90}(A) = B$, $P^{90}(B) = C$. A középpontos tükrözés középpontja tehát az AC szakasz K felezőpontja (lásd a 2. ábrát).

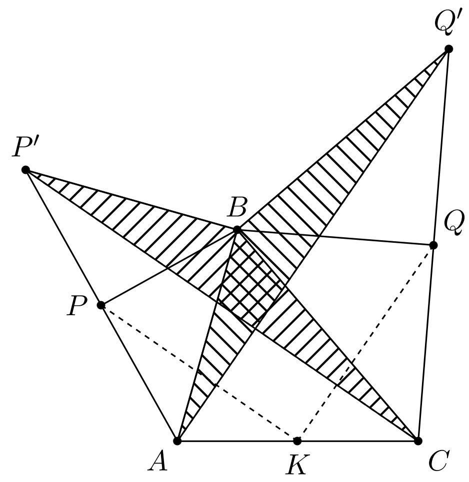


4.1M1.2. ábra.

Gondolatmenetünk szerint a PK, QK egyenesek megegyeznek a korábbi t_1, t_4 tengelyekkel, melyek szöge 90°. Mellékeredményként az is kijött, hogy a PKQ háromszög egyenlő szárú és derékszögű.

2. megoldás. [16]

Nagyítsuk a PK szakaszt az A csúcsból, a QK szakaszt pedig a C csúcsból a kétszeresére. A PK, QK szakaszok szöge helyett képeik, a velük párhuzamos $P'C$, $Q'A$ szakaszok szögét fogjuk vizsgálni.



4.1M2.1. ábra.

A $P'B$ szakasz felfogható az AB szakasz PB egyenesre való tükörképének, tehát $P'B = AB$ és $P'BA\angle = 90°$. Ehhez hasonlóan $Q'B = CB$ és $Q'BC\angle = 90°$.

Vizsgáljuk az $P'BA$, ABQ' háromszögeket. Az elsőből a második egy B körüli 90°-os forgatással kapható meg, hiszen ennél a forgatásnál P' képe A, míg C képe Q'. A forgatás a $P'C$ szakaszt az AQ' szakaszba képezi, ezért ezek szöge a forgatás szögével, 90°-kal egyezik meg. Ugyanennyi a kérdezett szög, $PKQ\angle$ értéke is.

4.3. Nevezzük el az egyeneseket így:

$$e_1, \qquad e_2, \qquad e_3, \qquad e_4. \tag{1}$$

Nevezzük meg a metszéspontokat ciklikusan:

$$e_1 \cap e_2 = P_1, \qquad e_2 \cap e_3 = P_2, \qquad e_3 \cap e_4 = P_3, \qquad e_4 \cap e_1 = P_4,$$

és irányítsuk az (1) egyeneseket úgy, hogy rajtuk rendre a

$$\overrightarrow{P_4P_1}, \qquad \overrightarrow{P_1P_2}, \qquad \overrightarrow{P_2P_3}, \qquad \overrightarrow{P_3P_4}$$

vektorok iránya legyen a pozitív irány és legyen

$$P_4P_1 = a_1, \qquad P_1P_2 = a_2, \qquad P_2P_3 = a_3, \qquad P_3P_4 = a_4. \tag{2}$$

Jelölje α_4 azt az irányított szöget, amellyel a t_4 irányított egyenes a t_1 irányított egyenesbe forgatható, és ehhez hasonlóan α_i $(i = 1, 2, 3)$ azt a szöget, amely az e_i irányított egyenest az e_{i+1} irányított egyenesbe forgatja. Ezek a szögek csak $\pmod{360°}$ vannak meghatározva. Az irányított szögek összeadásának szabálya szerint:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = \widehat{t_4t_1} + \widehat{t_1t_2} + \widehat{t_2t_3} + \widehat{t_3t_4} \equiv \widehat{t_4t_4} \equiv 0° \pmod{360°}. \tag{3}$$

Jelölje t_4^+ az e_4, e_1 egyeneseknek azt a szögfelezőjét, amelyre való tengelyes tükrözés a két egyenest irányítástartó módon képezi egymásba (lásd az 1. ábrát) és legyen t_4^- a másik szögfelező.

Az utóbbira való tükrözés is egymásba viszi az e_1, e_4 egyeneseket, de megfordítja az irányítást. Legyen továbbá t_i^+ $(i = 1, 2, 3)$ az e_i, e_{i+1} egyeneseknek az a szögfelezője, amelyre való tengelyes tükrözés a két egyenest irányítástartó módon képezi egymásba és legyen t_i^- a másik szögfelezőjük.

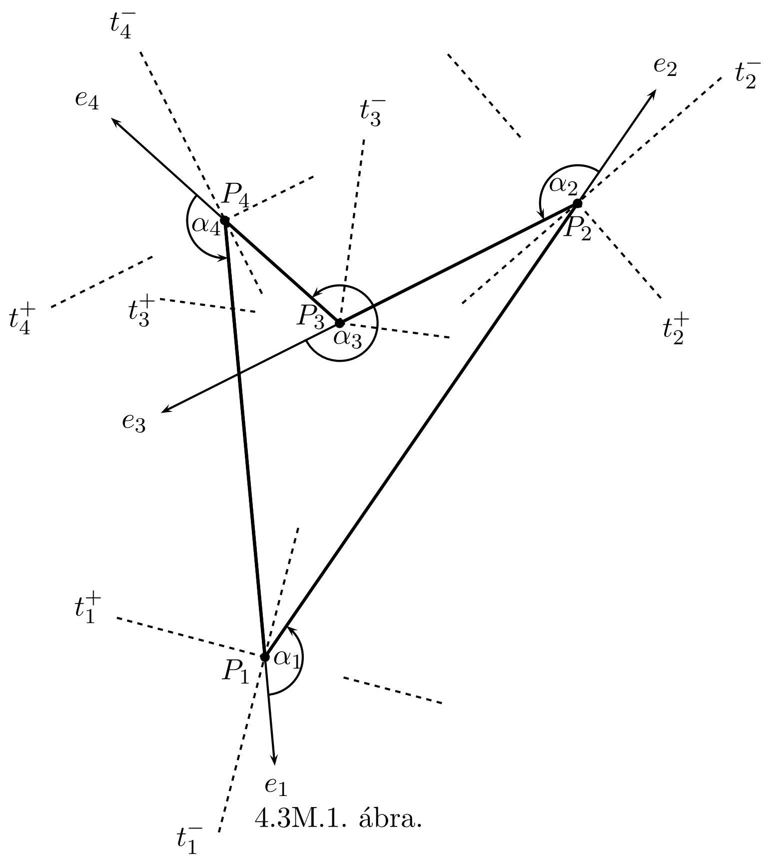
A probléma pontosítása: A (2) hosszúságok ismeretében eldönthető-e, hogy a négy előjelet megfelelően megválasztva a

$$t_1^\pm, \qquad t_2^\pm, \qquad t_3^\pm, \qquad t_4^\pm \tag{4}$$

egyenesek egy közös ponton haladnak át? A (2) hosszakból hogyan lehet kitalálni a megfelelő előjeleket?

Legyen

$$\widehat{t_1t_2} = \alpha_1, \qquad \widehat{t_2t_3} = \alpha_2, \qquad \widehat{t_3t_4} = \alpha_3, \qquad \widehat{t_4t_1} = \alpha_4. \tag{5}$$



4.3M.1. ábra.

Mivel

$$\widehat{t_4^+e_4} \equiv \frac{\alpha_4}{2} \pmod{180^\circ} \qquad \text{és} \qquad \widehat{e_4t_1^+} = \frac{\alpha_1}{2} \pmod{180^\circ},$$

így

$$\widehat{t_4^+t_1^+} = \frac{\alpha_4 + \alpha_1}{2} \pmod{180^\circ}.$$

Ha hozzátesszük még, hogy

$$\widehat{t_i^+t_i^-} \equiv \widehat{t_i^-t_i^+} \equiv 90^\circ \pmod{180^\circ},$$

akkor kimondhatjuk az alábbi általános összefüggéseket ($i = 1, 2, 3, 4$, illetve $i = 5$ megfelel $i = 1$-nek):

$$\widehat{t_i^+t_{i+1}^+} \equiv \frac{\alpha_i + \alpha_{i+1}}{2} \pmod{180^\circ}, \qquad \widehat{t_i^+t_{i+1}^-} \equiv \frac{\alpha_i + \alpha_{i+1}}{2} + 90^\circ \pmod{180^\circ}$$

$$\widehat{t_i^- t_{i+1}^-} \equiv \frac{\alpha_i + \alpha_{i+1}}{2} \pmod{180^\circ}, \qquad \widehat{t_i^- t_{i+1}^+} \equiv \frac{\alpha_i + \alpha_{i+1}}{2} + 90^\circ \pmod{180^\circ}.$$

Jelöljük most az egyenes jelével az arra az egyenesre vonatkozó tükrözést is. Ismeretes, hogy az a, b egyenesekre vonatkozó tükrözések $b \circ a$ kompozíciója (előbb hajtjuk végre a-t, utána b-t) az

$$2\widehat{ab} \equiv \phi \pmod{360^\circ}$$

irányított szöggel való elforgatás ($\widehat{ab}$ még csak mod 180° értelmezett, a forgásszög pedig már mod 360°), illetve eltolás, ha ez a szög 0° (-val kongruens). Mindezek alapján az egymás melletti szögek szögfelezőire vonatkozó tükrözések kompozíciója jól leírható:

$$t_{i+1}^+ \circ t_i^+ = O_{i++,}^{\alpha_i+\alpha_{i+1}}, \qquad t_{i+1}^+ \circ t_i^- = O_{i+-,}^{\alpha_i+\alpha_{i+1}+90^\circ},$$

$$t_{i+1}^- \circ t_i^- = O_{i--,}^{\alpha_i+\alpha_{i+1}}, \qquad t_{i+1}^+ \circ t_i^- = O_{i-+,}^{\alpha_i+\alpha_{i+1}+90^\circ},$$

ahol $O_{i\pm\pm,}^{\phi}$ a $t_i^\pm$, $t_{i+1}^\pm$ tengelyek metszéspontja körüli ϕ szögű forgatást jelenti, illetve a megfelelő eltolást, ha a két tengely párhuzamos, azaz ha $\phi \equiv 0 \pmod{360^\circ}$.

Tekintsük most a

$$\psi = t_4^\pm \circ t_3^\pm \circ t_2^\pm \circ t_1^\pm \tag{6}$$

egybevágósági transzformációt a négy előjel tetszőleges választása esetén. Az előző bekezdésben mondottak szerint (3) figyelembevételével állítható, hogy ψ eltolás (azaz összesen 0°-kal forgat), ha az előjelek között páros sok „+” van, illetve középpontos tükrözés (azaz összesen 180°-kal forgat), ha az előjelek között páratlan darab „+” van.

A ψ transzformációnak fix egyenese az e_1 egyenes, hiszen

$$t_1^\pm(e_1) = e_2, \qquad t_2^\pm(e_2) = e_3, \qquad t_3^\pm(e_3) = e_4, \qquad t_4^\pm(e_4) = e_1.$$

Ezek szerint a ψ transzformáció egy e_1-gyel párhuzamos eltolás (esetleg az identitás) vagy egy e_1-re illeszkedő pontra vonatkozó tükrözés.

Lemma Ha az előjelek megfelelő választása mellett a (4) egyenesek egy ponton haladnak át, akkor az előjelek között páros sok „+” van.

A lemma bizonyítása Ha a szögfelezők egy O ponton mennek át, akkor O köré rajzolható egy olyan k kör, amely mind a négy oldalegyenest érinti. Jelöljük ezeket az érintési pontokat T_1, T_2, T_3, T_4-gyel ($T_i \in e_i$). Mindegyik érintési pontról eldönthető, hogy saját irányított egyenesének pozitív vagy negatív felén van. (Pl. e_1-en P_4 a 0 és tőle P_1-felé van a pozitív rész, e_i-n P_{i-1} a 0 és tőle P_i-felé van a pozitív rész.)

A t_i^+ szögfelezőre vonatkozó tükrözés felcseréli a szárak pozitív és negatív félegyeneseit, a t_i^- szögfelezőre vonatkozó tükrözés pedig megtartja az előjeleket. Másrészt, az egymást O-ban metsző szögfelezőkre vonatkozó tükrözés a két megfelelő oldal érintési pontját egymásba tükrözi. A tükrözések ψ kompozíciója a T_1 érintési pontot önmagába képezi, tehát a négy tükrözés között páros sok olyan lesz amely megfordítja az előjelet. Ezzel a lemmát igazoltuk.

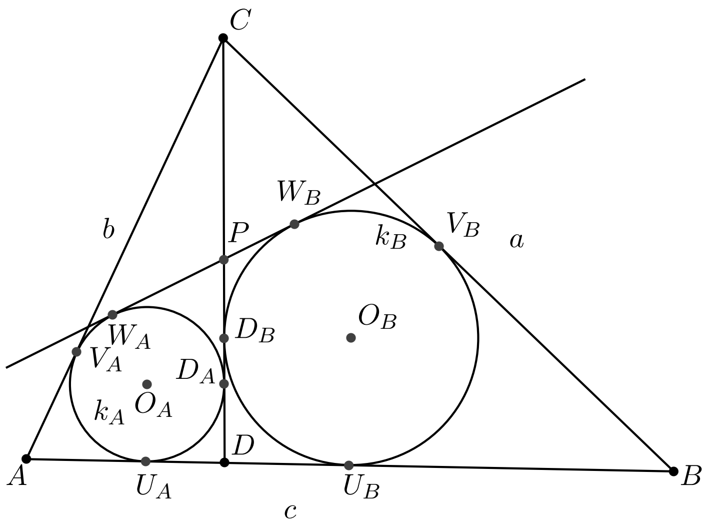
Következmény A (4) egyenesek pontosan akkor haladnak át egyetlen ponton, ha (6)-ben definiált ψ transzformáció az identitás, de a (megfelelő előjelekkel vett) $t_2^\pm \circ t_1^\pm$ transzformáció nem eltolás.

Valóban, ψ csak úgy lehet identitás, ha páros sok pozitív előjelet választunk és a négy szögfelező is csak így mehet át egy ponton. Ebben az esetben a $t_2^\pm \circ t_1^\pm$, $t_4^\pm \circ t_3^\pm$ transzformációk kompozíciója eltolás így vagy mind a kettő eltolás (fent ezt zártuk ki) vagy azonos a középpontjuk.

Állítás Pontosan akkor lehet (4)-ben a négy előjelet úgy megválasztani, hogy a négy egyenes egy ponton haladjon át, ha az alábbi kifejezésben megválaszthatók az előjelek úgy, hogy teljesüljön az egyenlőség:

$$a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm a_4 = 0. \tag{7}$$

4.4. Használjuk az 1. alábbi ábra jelöléseit!



4.4M.1. ábra.

A levezetésben sokszor kihasználjuk, hogy külső pontból a körhöz húzott két érintőszakasz egyenlő hosszú. A másik ötlet az, hogy a CP szakasz hosszát kétszer is felírjuk!

Egyrészt

$$CP = CD_B - PD_B = CV_B - PW_B,$$

Másrészt

$$CP = CD_A - PD_A = CV_A - PW_A.$$

E CP-re előbb kapott két kifejezést összeadjuk, és felhasználjuk, hogy a körök centrálisára szimmetrikus W_BW_A, U_BU_A érintőszakaszok egyenlő hosszúak.

$$2CP = (CV_B + CV_A) - (PW_B + PW_A) = (CV_B + CV_A) - W_BW_A.$$

A kisebbítendőt és a kivonandót is megnöveljük a B-ből illetve az A-ból húzott érintőszakaszok hosszával:

$$2CP = (CV_B + V_BB + CV_A + V_AA) - (BW_B + W_BW_A + W_AA) = CB + CA - AB,$$

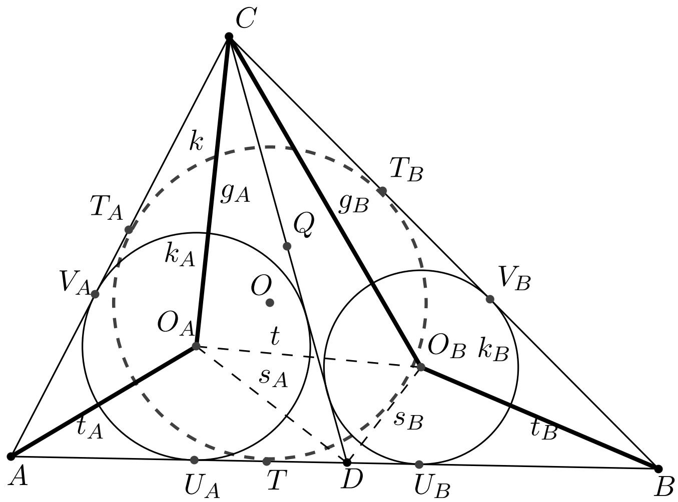
azaz

$$CP = \frac{a + b - c}{2} = s - c.$$

Tehát a CP szakasz hossza csakis az ABC háromszög oldalaitól függ és független a D pont helyzetétől.

4.5. A **??**. ábrán berajzoltuk az ABC, ACD, BCD háromszögek k, k_A, k_B beírt köreit, melyek középpontja rendre O, O_A, O_B. Behúztuk még az $CAB\angle$, $ABC\angle$, $BCD\angle$, $DCA\angle$ szögek t_A, t_B, g_B, g_A szögfelezőit, illetve az $O_AO_B = t$ tengelyt. A k körnek az AB, BC, CA oldalakkal való érintési pontja rendre T, T_B és T_A.

Az alábbi gondolatmenetben az egyenes betűjelével jelöljük az egyenesre vonatkozó tengelyest tükrözést is.



4.5M.1. ábra.

Tekintsük a

$$\phi = t_A \circ g_A \circ g_B \circ t_B$$

transzformációt (a legutolsónak írt tükrözést vegezzük el először). Ez irányítástartó egybevágóság, hiszen négy tengelyes tükrözés szorzata. A T pont fixpontja a ϕ transzformációnak, hiszen $t_B(T) = T_B$, $g_B(T_B) = Q$, ahol a Q pontról annyit lehet tudni, hogy $Q \in CD$ és $CQ = CT_B$, így $g_A(Q) = T_A$ és $t_A(T_A) = T$. A ϕ transzformáció tehát egy T körüli forgatás.

Legyen még $ABC\angle = \beta$, $BCA\angle = \gamma$, $BCD\angle = \gamma_B$, $DCA\angle = \gamma_A$, $CAB\angle = \alpha$, és így $O_BBC\angle = \frac{\beta}{2}$, $BCO_B\angle = \frac{\gamma_B}{2}$, $O_CCA\angle = \frac{\gamma_A}{2}$, $CAO_A\angle = \frac{\alpha}{2}$. A ϕ transzformáció így is írható:

$$\phi = (t_A \circ g_A) \circ (g_B \circ t_B),$$

ahol a $g_B \circ t_B$ transzformáció a két tengely O_B középpontja köüli forgatás a két tengely szögének kétszeresével, azaz – a BCO_B háromszögben számolva – $(\beta + \gamma_B)$ szöggel, míg a $t_A \circ g_A$ transzformáció az O_A pont körüli $(\gamma_A + \alpha)$ szöggel való forgatás:

$$\phi = O_A^{\gamma_A+\alpha} \circ O_B^{\beta+\gamma_B}.$$

Az $O_B^{\beta+\gamma_B}$ forgatás felírható bármely két olyan O_B-ben metsző tengelyre vonatkozó tükrözésként, mely tengelyek szöge $\frac{\beta+\gamma_B}{2}$. Legyen a két tengely közül a második $t = O_BO_A$:

$$O_B^{\beta+\gamma_B} = t \circ \tau_B.$$

Ehhez Az $O_A^{\gamma_A+\alpha}$ forgatáshoz elsőnek választjuk a t tengelyt:

$$O_A^{\gamma_A+\alpha} = \tau_A \circ t,$$

így

$$\phi = (\tau_A \circ t) \circ (t \circ \tau_B) = \tau_A \circ (t \circ t) \circ \tau_B = \tau_A \circ \tau_B.$$

Most azt kaptuk, hogy a ϕ transzformáció a τ_A, τ_B tengelyek metszéspontja körüli forgatás. Korábbi eredményünkkel összevetve tehát a τ_B, τ_A egyenesek az O_BT, O_AT egyenesek, azaz az O_BO_AT háromszög szögei:

$$TO_BO_A\angle = \frac{\beta + \gamma_B}{2}, \qquad O_BO_AT\angle = \frac{\alpha + \gamma_A}{2}, \qquad O_ATO_B\angle = 90°.$$

Vegyük még észre, hogy $t(Q) = T$, hiszen

$$g_B \circ t_B = t \circ \tau_B \qquad \Longrightarrow \qquad t \circ g_B \circ t_B = \tau_B,$$

így a $(g_B \circ t_B)(T) = Q$ pontra $t(Q) = (t \circ g_B \circ t_B)(T) = \tau_B(T) = T$. A CD egyenes a k_A, k_B körök közös belső érintője, erre illeszkedik a Q pont, így CD-t a k_A, k_B körök közös szimmetriatengelyére, a t tengelyre tükrözve is a két kör egy közös belső érintőjéhez jutunk. Ez az érintő átmegy T, tehát az állítást igazoltuk.

Megjegyezzük, hogy az AB egyenes a k_A, k_B körök T-n átmenő közös külső érintője, így ennek t-re vonatkozó tükörképe is közös külső érintő. Ebből adódik, hogy a Q pont megegyezik a a 4.4M. megoldásban definiált P ponttal. Mivel $CQ = CT_B$ és az utóbbi független a D pont választásától, így egyúttal bizonyítást adtunk a 4.4 feladatra is.

4.2. Igen, pld a félegyenes vagy a félsík.

5. Kerületi szögek I.

5.3. Állítás: $B'H_A \parallel AC$

Bizonyítás: A k kör H_AB, CH_A ívei egyenlők és azonos irányításúak is, így a H_AB ív tükörképeként kapott AB' ív is egyenlő nagyságú, de ellenkező irányítású, mint a CH_A ív. Az AB', CH_A ívek tehát az AC húr azonos oldalán állnak és egyenlők, tehát az AC felezőmerőlegesére vonatkozó tükrözés egymásba képezi őket. Ennél a tükrözésnél tehát H_A képe B', azaz a H_AB egyenes is merőleges AC felezőmerőlegesére, így párhuzamos AC-vel.

Állítás: $BAH_A\sphericalangle = H_AAC\sphericalangle$.

Bizonyítás: Az előző állítás miatt $AH_AB'\sphericalangle = H_AAC\sphericalangle$ (váltószögek), míg a tükrözés miatt $AH_AB'\sphericalangle = BAH_A\sphericalangle$.

5.1. Legyen C olyan, A-tól és B-től különböző pont, amelyre teljesül a

$$ACB\sphericalangle \equiv \gamma \pmod{180°} \tag{2}$$

összefüggés és jelölje az AC, CB szakaszok felezőmerőlegeseit rendre t_B és t_A. A t_B-re vonatkozó tükrözés A-t C-be, a t_A-ra vonatkozó tükrözés pedig C-t B-be képezi, így a két tükrözés $\phi = t_A \circ t_B$ kompozíciója A-t B-be viszi. A merőleges szárú szögek tétele szerint

$$t_Bt_A\sphericalangle \equiv \gamma \pmod{180°}, \tag{3}$$

tehát a ϕ transzformáció a t_B és t_A metszéspontja körüli 2γ szögű forgatás. Egyetlen olyan 2γ szögű forgatás van, amely A-t B-be viszi és az az O középpontú, tehát $O = t_B \cap t_A$ és $d(A, O) = d(t_B(A), t_B(O)) = d(C, O)$, azaz $C \in k$.

Másrészt, ha $C \in k$ tetszőleges pont, akkor jelölje az OA, OC irányított egyenesek illetve az OC, OB irányított egyenesek szögfelezőjét t_B illetve t_A. E két tengelyre vonatkozó tükrözés $\phi = t_A \circ t_B$ kompozíciója A-t B-be viszi. A ϕ transzformáció egy O-körüli forgatás és az O-körüli

2γ szögű forgatás is B-be képezi A-t, így ϕ csak ez a forgatás lehet. Következésképpen teljesül a (3) összefüggés. A t_B, t_A szögfelezők egyben az AC, CB szakaszok felezőmerőlegesei is, illetve $A = C$ esetén ($B = C$ esetén) t_B (t_A) az OA sugár (OB sugár) egyenesével egyezik meg, így alkalmazhatjuk a a merőleges szárú szögek tételét, azaz fennáll a (1) reláció is, ha $A = C$ (illetve $B = C$) esetén AC-n (ill. BC-n) a sugárra merőleges egyenest, az érintőt értjük.

5.6. **a)** Az AB szakasz belső pontjainak halmaza.
b) Az AB egyenes AB szakaszon kívül eső két része, azaz két félegyenes.
c) Az AB szakasz Thalesz körének az A és B határolta egyik félköre.
d) Az AB szakasz γ-hoz mod 180° tartozó látókörének egyik íve.

5.5.

1. megoldás. Az ABC háromszög BC oldalának F_{BC} felezőpontjára tükrözzük A-t, az így kapott pontot jelöljük A'-vel. Az A-nál fekvő szög és az A-ból induló súlyonal ismeretében az ABA' háromszögben ismerjük az $AA' = 2s_a$ szakaszt, az hozzá tartozó $180° - \alpha$ szögű látókörív szerkeszthető, a B csúcs ezen lesz.

Az A-ból induló magasság talppontját jelöljük T-vel. Az ATF_{BC} derékszögű háromszögben ismerjük az $AF_{BC} = s_a$ átfogót és az $AT = m_a$ befogót, tehát ez a háromszög szerkeszthető. Az $F_{BC}T$ egyenes a látókörívből kimetszi a B csúcsot, ennek F_{BC}-re vett tükörképe lesz C.

Nyilván nincs megoldás, ha a súlyvonal hossza nagyobb a magasságnál. Egyenlőség esetén az egyenlőszárú háromszög könnyen szerkeszthető. Ha a magasság kisebb a súlyvonalnál, akkor az ATF_{BC} háromszög az AA' egyenes mindkét partjára szerkeszthető, így két, szimmetrikus(!) megoldást kapunk.

2. megoldás. Az A-ból induló magasság talppontját jelöljük T-vel, a BC oldal felezőpontját F_{BC}-vel. Az ATF_{BC} derékszögű háromszögben ismerjük az $AF_{BC} = s_a$ átfogót és az $AT = m_a$ befogót, tehát ez a háromszög szerkeszthető.

Ismerjük tehát a BC oldal és a hozzátartozó súlyvonal bezárt δ szögét, valamint az A-nál fekvő szöget. Ebből már szerkeszthető egy, a keresett háromszöghöz hasonló: felveszünk egy tetszőleges szakaszt, fölé az adott α szögű látókörívet szerkesztünk, majd a szakasz felezőpontjából a δ szögben hajló egyenes kimetszi a hasonló háromszög harmadik csúcsát. A kapott háromszöget a magasságok arányában kinagyítva kapjuk a keresett háromszöget.

Ha a megadott súlyvonal kisebb a magasságnál, nincs megoldás, különben egy megoldás van.

5.1. A két négyszög megfelelő szögei egyenlők, és az egyikben a szemközti szögek összege 180°.

5.2. Egy ellenpélda: ugyanabba a körbe írt téglalap és négyzet.

5.3. Az átlóik egyenlők.

6. Kerületi szögek II.

6.1.

1. megoldás. **a)** Dolgozzunk irányított szögekkel! Legyen $K_1, K_2 \in k$, $L_1, L_2 \in l$ két-két megfelelő pont, azaz $A \in K_1L_1$, $B \in K_2L_2$. Egyrészt

$$L_1K_1B\sphericalangle \equiv AK_1B\sphericalangle \equiv AK_2B\sphericalangle \equiv L_2K_2B\sphericalangle \pmod{180°}, \tag{1}$$

ahol a két szélső egyenlőség (kongruencia) azért teljesül, mert L_1, A és K_1, illetve L_2, A és K_2 egy egyenesen van, míg a középső a kerületi szögek tétele a k körben. Másrészt ehhez hasonlóan

$$BL_1K_1\sphericalangle \equiv BL_1A\sphericalangle \equiv BL_2A\sphericalangle \equiv BL_2K_2\sphericalangle \pmod{180°}. \tag{2}$$

Azt kaptuk, hogy az LK egyeneshez a KB, LB egyenesek állandó szögben hajlanak, tehát a 3.6. feladat a) részének eredménye szerint az LKB háromszög szögei állandó nagyságúak.

b) Jelölje a k illetve az l kör A pontbeli érintőjét e_k illetve e_l. Az érintő szárú kerületi szögre vonatkozó tételt a k körben a KA húrra alkalmazva kapjuk, hogy

$$KL\,e_k\sphericalangle \equiv KA\,e_k\sphericalangle \equiv KB\,BA\sphericalangle \pmod{180^\circ},$$

míg az l kör LA húrjára

$$e_l\,KL\sphericalangle \equiv e_l\,LB\sphericalangle \equiv BA\,LB\sphericalangle \pmod{180^\circ}.$$

Mivel

$$KL\,e_k\sphericalangle e_k\,e_l\sphericalangle + e_l\,KL\sphericalangle \equiv KL\,KL\sphericalangle \equiv 0^\circ \pmod{180^\circ},$$

így

$$0^\circ \equiv KB\,BA\sphericalangle + BA\,LA\sphericalangle + e_k\,e_l\sphericalangle \equiv KB\,LB\sphericalangle + e_k\,e_l\sphericalangle \pmod{180^\circ},$$

azaz

$$KBL\sphericalangle \equiv e_l\,e_k\sphericalangle \pmod{180^\circ}.$$

A $KBL\sphericalangle$ irányított szög tehát az l kör és a k kör A-beli érintőinek irányított szögével egyezik meg.

2. megoldás. b) Válasszuk K-nak a k körön B-vel átellenes pontot. Ilyenkor L az l körön B-vel átellenes pont (lásd az 5.2. feladatot). A körök B-beli érintői a BL, BK átmérőkre merőleges egyenesek, tehát a merőleges szárú szögekre vonatkozó tétel (**??** feladat) szerint az l és a k kör B-beli érintőinek irányított szöge az $LBK\sphericalangle$ szöggel egyezik meg (mod 180°).

6.2.

1. megoldás. Az L_AL_B szakasz hossza állandó.

2. megoldás. a) A 6.1. feladat a) részének állítása szerint az egyik metszésponton átmenő szelő a másik metszésponttal egymáshoz hasonló háromszögeket alkot. Egy ilyen háromszög megszerkeszthető és felnagyítható, hogy a szelőnek megfelelő oldala megfelelő hosszúságú legyen. Adott a két kör közös ponjainak távolsága, így meghatározható (tipikusan két lehetőség), hogy a szelőnek megfelelő oldalon hol van a körök közös pontja. Ezután a szelő már egyszerűen szerkeszthető be a körpárba.

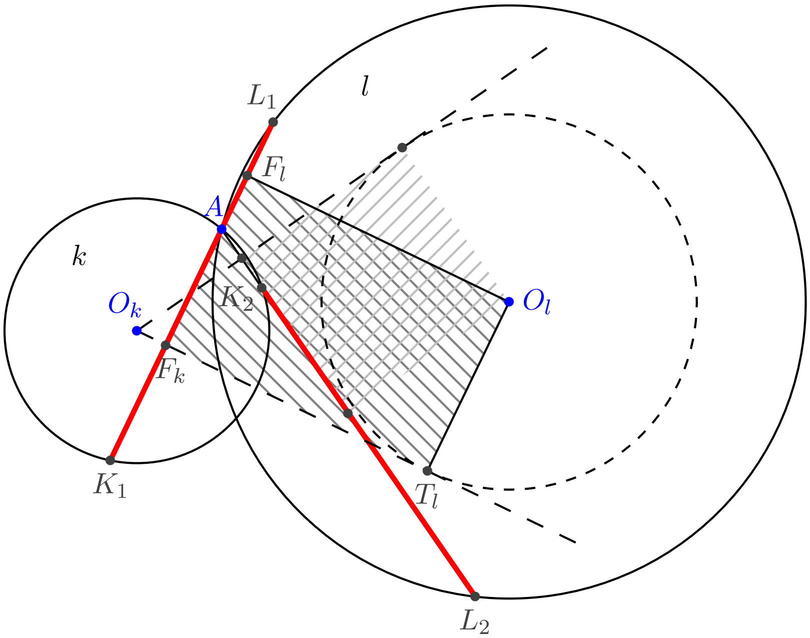
3. megoldás. a) Induljunk ki a kész 1. ábrából! Az O_K és O_L középpontú k, l körök A metszéspontján át szerkesztett KL szelő $K \in k$, $L \in l$ legyen a kívánt a hosszúságú. Az AK, AL húrok F_K, F_L felezőpontjait összekötő szakasz hossza $\frac{a}{2}$. Tekintsük az O_l középpontból az F_KO_K egyenesre bocsájtott merőleges T_l talppontját. A $T_lF_kF_lO_l$ négyszög téglalap, hiszen a T_l, F_l, F_k csúcsainál derékszög van. E téglalapnak ismert az $\frac{a}{2} = F_kF_l = T_lO_l$ oldala és az F_kT_l egyenes egy pontja, így megszerkeszhtetjük: Ez az egyenes ugyani az O_l középpontú $\frac{a}{2}$ sugarú körhöz húzott érintő.

Ha $\frac{a}{2} < O_kO_l$, akkor O_k kívül van a szerkesztett körön, két érintő, két megoldás is van. Ha $a = 2O_kO_l$ akkor csak egy érintő, és abból származóan csak egy megoldás van, az O_kO_l centrálissal párhuzamos szelő. A szelődarab hossza nem lehet $2O_kO_l$-nél nagyobb.

b) Fent megkaptuk, hogy a maximális hossz $2O_kO_l$.

6.7. Lásd [19] 23. oldal.

6.1. A beírt kör I középpontjából a BC oldal $90^\circ + \frac{\alpha}{2}$ szög alatt látszik, a hozzá írható kör I_A középpontjából pedig $90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ szög alatt. E két szög összege 180°, tehát a $BICI_A$ négyszög valóban húrnégyszög.



6.2M3.1. ábra.

6.14. A BI egyenes a B-ből induló belső szögfelező, a BI_A egyenes pedig a külső szögfelező, tehát merőlegesek egymásra. Ugyanezért a CI és a CI_A egyenesek is merőlegesek egymásra. Tehát az II_A szakasz mind B-ből, mind C-ből derékszögben látszik. Ezért Thálész tételének megfordítása szerint B is, C is rajta van az II_A átmérőjű körön.

6.2. Legyen H_A az A-t nem tartalmazó $\widehat{BC}$ ív felezőpontja. Ezen ív egyenlő hosszúságú $\widehat{BH_A}$, $\widehat{H_AC}$ részívei nem tartalmazzák az A pontot, így a $BAH_A\angle$, $H_AAC\angle$ szögek ezen ívek kerületi szögei, tehát egyenlők egymással. Az AH_A egyenes tehát felezi a BAC szöget és a megfelelő $\widehat{BC}$ ív választása miatt az BAC szög belsejében halad, így AH_A ezen szög szögfelezője.

6.3. A 6.2. feladat szerint az A-t nem tartalmazó $\widehat{BC}$ ív H_A felezőpontján átmegy az A-nál fekvő szög szögfelezője. Másrészt a BC oldal felezőmerőlegese a kör és egyben a BC szakasz szimmetria tengelye, tehát szimmetriatengelye a kör BC által levágott íveinek is. Ezért a felezőmerőleges is átmegy az ív H_A felezőpontján.

6.4. Az adott csúcsok legyenek B és C, a beírt kör középpontja I, a körülírt köré O. Ha az adatok úgy vannak felvéve, hogy $OB \neq OC$, akkor ellentmondás van, nincs ilyen háromszög. A továbbiakban feltesszük, hogy $OB = OC$.

Tekintsük az O középpontú B-n áthaladó k kört, ez kell legyen a háromszög körülírt köre. Világos, hogy az ABC háromszög pontjai a k körvonalon és annak belsejében helyezkednek el, tehát az I pontnak k belsejében kell lennie. Ha nem így voltak felvéve az adatok, akkor nincs megfelelő háromszög sem.

A 6.3. feladat szerint a k kör egyik BC ívének felezőpontja lesz az A-ból induló belső szögfelező, tehát az AI egyenes és a k kör A-tól különböző metszéspontja. A k kör és a B, C pontok ismeretében H_A felvehető (kétféleképpen), a H_AI egyenes megszerkeszthető és ennek k-val vett másik metszéspontja lehet csak A.

A szerkesztés tehát kész, de vajon megfelelő-e az így kapott ABC háromszög. A szerkesztés biztosítja, hogy k a körülírt kör, O annak középpontja legyen, de I biztosan a beírt kör középpontja lesz? Ez nem mindig lesz így, a fenti gondolatmenetben csak azt használtuk fel, hogy I

rajta van a belső szögfelezőn (és nincs k-n). Az I pont elhelyezkedésére a k kör és a B, C pontok már egy komoly feltételt adnak, ezt látni fogjuk a 6.5-6.7. feladatokban.

6.5.

1. megoldás. *Hiányos megoldás*

A $BICI_A$ köré írható kör középpontja egyrészt rajta van BC felezőmerőlegesén, másrészt e kör átmérőjén, II_A-n is (lásd a **??**.). De az II_A egyenes az A-ból induló belső szögfelező egyenese, tehát a $BICI_A$ köré írható kör az A-ból induló belső szögfelező egyenesének és BC felezőmerőlegesének a metszéspontja, azaz az ABC háromszög köré írt kör A-t nem tartalmazó BC ívének a felezőpontja.

Ez a megoldás nem jó abban az esetben, ha az A-ból induló szögfelező és BC felezőmerőlegese egybeesik, azaz ha a háromszög egyenlő szárú: $AB = AC$.

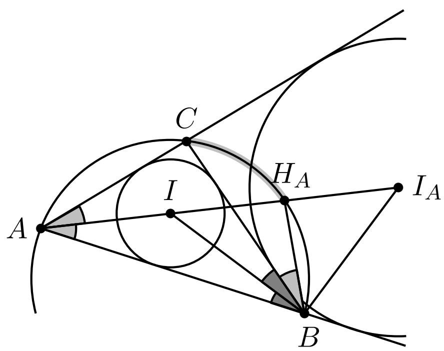
2. megoldás. Megmutatjuk, hogy a kör középpontja az A-hoz tartozó belső szögfelező és a háromszög körülírt körének A-tól különböző H_A metszéspontja. Ehhez azt kell igazolnunk, hogy

a) $BH_A = CH_A$, **b)** $BH_A = IH_A$, **b)** $BH_A = I_AH_A$.

a) Lásd a 6.3. feladatot!

b) Azt mutatjuk meg, hogy az IH_AB háromszög egyenlő szárú: $IH_A = H_AB$. Ehhez elég azt igazolnunk, hogy $H_AIB\angle = H_ABI\angle$.

Az I pont a szögfelezők metszéspontja, tehát $CAI\angle = IAB\angle = \frac{\alpha}{2}$, $CBI\angle = IBA\angle = \frac{\beta}{2}$. A körülírt kör H_AC ívéhez tartozó kerületi szögek egyenlők (lásd az 1. ábrát): $H_ABC\angle = H_AAC\angle = \frac{\alpha}{2}$. A $H_AIB\angle$ az AIB háromszög I csúcsnál lévő külső szöge, ez tehát a másik két csúcsnál fekvő belső szög összege: $H_AIB\angle = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$. Másrészt $H_ABI\angle = H_ABC\angle + CBI\angle = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$, tehát $IH_A = H_AB$, ahogy állítottuk.



6.5M2.1. ábra.

c) Ehhez hasonlóan mutatható meg, hogy a H_ABI_A háromszögben $H_ABI_A\angle = H_AI_AB$, tehát ez a háromszög is egyenlő szárú: $H_AB = I_AB$.

3. megoldás. Tudjuk, hogy I_A a BC fölötti $90° - \frac{\alpha}{2}$ szögű látóköríven van. Az ehhez tartozó középponti szög $180° - \alpha$. Tehát a BI_AC köré írható kör középpontja a BC felezőmerőlegesének az a pontja, amelyből BC éppen $180° - \alpha$ (irányított) szög alatt látszik. Ez a pont rajta van az ABC háromszög köré írt körén, éspedig az A-t nem tartalmazó BC körív felezőpontja. Ettől a ponttól tehát egyenlő távol van B, C és I_A, s mivel $BICI_A$ húrnégyszög, ezért O is.

6.6. Ha a AB a trapéz egyik alapja, akkor AB felezőmerőlegese szimmetriatengely, rajta van az átlók metszéspontja is. Nem nehéz megmutatni, hogy a felezőmerőleges körön belüli részén az AB egyenessel való metszésponton kívül bármelyik pont lehet az átlók metszéspontja.

Ha AB a trapéz szára és M az AC, BD átlók metszéspontja, akkor a szimmetrikus trapézban $ACB\angle = DBC\angle$ és $BMA\angle$ a BMC háromszög külső szöge, így $BMA\angle = 2BCA\angle$. Mivel $BCA\angle$ az AB húr kerületi szöge az adott körben, így egyúttal $BOA\angle = 2BCA\angle = BMA\angle$ tehát M az ABO háromszög körülírt körének az adott körön belüli ívén fut. Nem létezne a körülírt kör, ha O az AB egyenesen lenen, azaz ha AB a kör átmérője lenne. Ebben az esetben azonban trapézt sem tudunk rajzolni, az átmérő nem lehet szár.

Ha M az ABO háromszög körülírt körének az adott kör belsejébe eső pontja, akkor az AM, BM egyenesek még egy-egy C, D pontban metszik a kört és a szögek segítségével megmutatható, hogy $ABCD$ húrtrapéz.

6.7. Tekintsük a k kör BC húr által levágott h, g íveinek H_A illetve G_A felezőpontjait és a H_A illetve G_A középpontú B-n átmenő körök k belsejébe eső i_h, i_g íveit. E két körív $i = i_g \cup i_h$ egyesítése lesz a keresett mértani hely.

A 6.4-6.5. feladatok megoldásából kiderül, hogy az I pont csak az előbb megadott i halmazban lehet. Most azt mutatjuk meg, hogy i minden pontjában lehet az I pont.

Legyen pl a H_A középpontú i_h körív egy pontja I_0 és tekintsük az $e = H_AI_0$ egyenest. Ez az egyenes nem érinti k-t, mert a k kör vonalának egy pontját (H_A) kötöttük ösze a k egy belső pontjával (I_0). Az egyenes tehát H_A-n kívül még egyszer metszi k-t, legyen ez a metszéspont A. Az A pont a k kör g ívén van, nem a h íven. Valóban, ha a h ív két pontját kötjük össze szakasszal, akkor a BC szakasz és a h ív határolta konvex alakzatban maradunk, az i_h ívet nem metszük, míg AH_A elmetszi i_h-t (I_0-ban).

A g és h ív egy-egy pontját összekötő szakasz elmetszi a BC egyenest, mert a BC által meghatározott egyik félsíkban van az egyik a másikban a másik. A k körlap konvex, így két pontját összekötő szakasza a k kör belsejében van, tehát a BC szakaszt is csak annak belsejében metszheti.Azt kaptuk, hogy az AH_A szakasz metszi a BC szakaszt, tehát belső szögfelező.

Az ABC háromszög beírt körének I középpontja illeszkedik az AH_A szögfelezőre és az i_h körívre is (lásd a 6.4-6.5. feladatokat), de ezeknek csak egy metszépontja van, I_0, azaz $I = I_0$. Megmutattuk, hogy i a kereett mértani hely.

6.8.

1. megoldás. Azt kell belátnunk, hogy $H_AN_A/H_AB = H_AB/H_AA$. Ha tekintjük a H_AN_AB és H_ABA háromszöget, ezeknek H_A-nél fekvő szöge megegyezik, tehát elég azt belátnunk, hogy még egy megfelelő szög megegyezik a két háromszögben. $N_ABH_A\angle = CBH_A\angle$ szög megegyezik az ugyanezen a CH_A íven nyugvó $CAH_A\angle$ szöggel, ami viszont megegyezik a $H_AAB\angle$ szöggel, mert H_AA szögfelező.

Ezzel beláttuk, hogy a két háromszög hasonló, tehát a két arány valóban megegyezik.

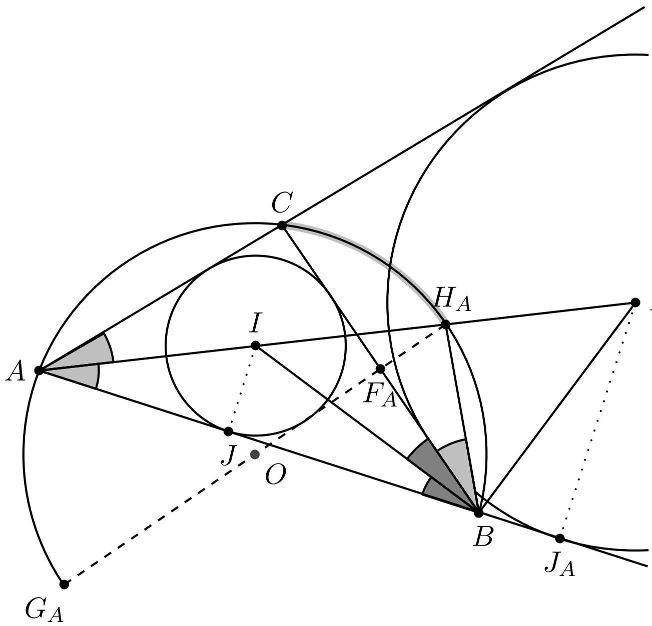
2. megoldás. Ha belátjuk, hogy az ABN_A háromszög köré írt kört a H_AB egyenes érinti, akkor a szelő-tétel érintős alakja(lásd a 11.4. feladatot) szerint kész vagyunk. Az érintéshez viszont elég belátni, hogy a $BAN_A\angle$ kerületi szög megegyezik a $H_ABN_A\angle$ érintő szöggel. Ez viszont könnyen igazolható, hiszen mindkét szög egyenlő az $N_AAC\angle$ szöggel. Előbbi azért, mert H_ANA felezi a $BAC\angle$ szöget, utóbbi azért, mert az eredeti háromszög köré írt körének H_AC köríven nyugvó kerületi szögek egyenlők.

6.9. Jelölje I merőleges vetületén AB-n J, míg H_A merőleges vetületét BC-n F_A. Az IJ szakasz hossza a beírt kör r sugara, míg F_A a BC szakasz felezőpontja (lásd a 6.3. feladatot).

a) Az AJI, BF_AH_A egymáshoz hasonló háromszögek, hiszen derékszögűek és A-nál illetve B-nél fekvő szögük is egyenlő ($\frac{\alpha}{2}$-vel). Ezért

$$\frac{JA}{IA} = \frac{F_AB}{H_AB}, \qquad \text{azaz} \qquad \frac{s-a}{p_a} = \frac{\frac{a}{2}}{d_a},$$

amiből $\frac{p_a}{d_a} = \frac{b+c-a}{a}$.



6.9M.1. ábra.

b) A H_AF_A egyenes a BC húr felezőmerőlegese, tehát folytatható a G_AH_A átmérővé. A H_AG_AB háromszög Thalesz tétele szerint B-nél derékszögű, míg $H_AG_AB\angle = H_AAB\angle = \frac{\alpha}{2}$, mert ezek a szögek a H_AB ív kerületi szögei. Így tehát a G_ABH_A háromszög is hasonló az AJI háromszöghöz:

$$\frac{IJ}{IA} = \frac{BH_A}{G_AH_A} \qquad \text{azaz} \qquad \frac{r}{p_a} = \frac{d_a}{2R},$$

azaz $d_ap_a = 2Rr$.

c) Az ICI_A háromszög szögei könnyen számolhatók, kiderül, hogy hasonló az IJB háromszöghöz, azaz

$$\frac{IC}{II_A} = \frac{IJ}{IB} \qquad \text{azaz} \qquad \frac{p_c}{2d_a} = \frac{r}{p_b},$$

ahol felhasználtuk, hogy H_A az II_A szakasz felezőpontja (lásd a 6.5. feladatot). Átszorzással kapjuk a kérdezett $p_b \cdot p_c = 2r \cdot d_a$ összefüggést.

6.10. A 6.8. feladat szerint $H_AM \cdot H_AA = H_AB^2$. Előbbi két szakasz ismeretében tehát H_AB szakasz hossza szerkeszthető. Másrészt 6.5. feladat megoldásában azt kaptuk, hogy $H_AB = H_AI$, ahol I az ABC háromszögbe írt kör középpontja. Tehát az I pont is szerkeszthető az AH_A egyenesen. (Megjegyezzük, hogy a BC-hez hozzáírt kör I_A középpontja is ugyanígy szerkeszthető volna, de erre nem lesz szükségünk.) Ha N_A az AH_A szakasz belső pontja, akkor a megszerkesztett I pont az AN_A szakasz belső pontja lesz. Más esetben nincs megoldás.

Ezután már megszerkeszthetjük az ABC háromszög beírt körét, hiszen ismerjük középpontját és sugarát. N_A-ból érintőt szerkesztünk ehhez a körhöz (ha N_A a kör belsejében van, akkor a sugár túl nagy, nem létezik az adatoknak megfelelő háromszög), az érintő és a H_A középpontú H_AB sugarú kör két metszéspontja lesz B és C.

Ennek a szerkesztésnek az a hátulütője, hogy elég nehéz bebizonyítani, hogy a kapott háromszögnek valóban a megrajzolt I középpontú kör a beírt köre, és azt se könnyű belátni, hogy AN_A valóban a belső szögfelező. Ezért érdemes változtatni az utolsó lépésen. Miután megszerkesztettük az I középpontú, adott sugarú kört, érintőt húzunk hozzá N_A-ból (csak egyet) és meghúzzuk hozzá mindkét érintőt A-ból. Ezek az érintők metszik ki a B és C csúcsot.

Ennél a szerkesztésnél is van nehézség. Először is: melyik érintőt húzzuk meg N_A-n keresztül? Könnyen látható, hogy ez nem lényeges, két, AH_A-ra szimmetrikus megoldást kapunk annak megfelelően, hogy melyiket húzzuk meg.

Most abban biztosak lehetünk, hogy az I közepű kör valóban az ABC háromszög beírt köre. De vajon AN_A valóban az A csúcsból induló belső szögfelezője-e? Ez abból következik, hogy átmegy a beírt kör középpontján. De vajon H_A rajta van-e a köré írt körön? Tudjuk, hogy $H_AN_A{\cdot}H_AA =$ $= H_AI^2$, tudjuk azt is, hogy a szögfelező és a köréírt kör metszéspontjára ugyanez teljesül. De nyilvánvaló, hogy az AN_A félegyenesnek csak egyetlen pontjára teljesül ez az egyenlőség. Legyen ugyanis $x = H_AN_A$, $h = N_AI$ és $f = N_AA$. Annak kell teljesülnie, hogy $x(x+f) = (x+h)^2$, és ez x-re elsőfokú egyenlet, amelynek egyetlen megoldása van. Vagyis H_A valóban a köréírt kör és a szögfelező metszéspontja.

Ezzel a szerkesztés helyességének az igazolását (is) befejeztük.

6.11. Legyen az ABC háromszög vizsgált csúcsa A, a magasságvonal AT, a súlyvonal AF_A, a körülírt kör középpontja O, a szögfelező AH_A, ahol H_A a körülírt kör A-t nem tartalmazó $\widehat{BC}$ ívének felezőpontja. A háromszög B-nél és C-nél fekvő szöge közül legalább az egyik hegyesszög, legyen pl B-nél hegyesszög.

a) $BAT_A\angle = 90° - T_ABA\angle = 90° - \beta$, míg a kerületi és középponti szögek tétele szerint $COA\angle = 2CBA\angle = 2\beta$ és az AOC háromszög egyenlő szárú, tehát $CAO\angle = 90° - \beta$. Mivel B-nél hegyesszög van, így a magasságot úgy kapjuk, hogy ha az AB oldalt a háromszög belseje felé forgatjuk és AC-t is a háromszög belseje felé kell forgatni, hogy AO-t kapjuk. A két forgási szög is egyenlő, így a BAC szög szögfelezője egyben a T_AAO szög szögfelezője is, tehát a magasság és a sugár közé esik.

b) Az $AT_AH_AF_A$ négyszög trapéz (lásd a 6.3. feladatot), így konvex. Az AH_A átló az AT_A, AF_A oldalak közé esik, tehát s szögfelező a súlyvonal és a magasság közé.

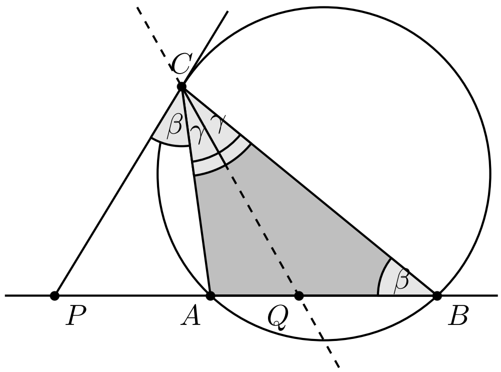
c) Tekintsük az AOH_A háromszöget! Ha az ABC háromszögben A-nál hegyesszög van, akkor F_A az OH_A szakaszon van, ha $BAC\angle = 90°$, akkor $F_A = O$, míg ha A-nál tompaszög van, akkor O esik az F_AH_A szakaszra. Így a vizsgált szakaszok sorrendje attól függ, hogy A-nál milyen szög van, pontosan akkor esik a súlyvonal a szögfelező és a körülírt kör középpontjához húzott sugár közé, ha $BAC\angle < 90°$.

6.16. Az a oldal és a szemközti szög ismeretében megszerkeszthetjük a BC húr fölötti α szögű látókörívet, s így a háromszög köré írt körét is. Legyen H_A az A-t nem tartalmazó BC körív felezőpontja. Ezt a pontot is meg tudjuk szerkeszteni. Legyen továbbá N_A az A-ból induló (belső) szögfelező és a BC oldal metszéspontja. Nyilván elég ezt az N_A pontot megszerkeszteni, hiszen ennek ismeretében a H_AN_A egyenesnek a körrel való második metszéspontja adja az A csúcsot. Elég tehát az $H_AN_A = x$ szakasz hosszát megszerkesztenünk.

A 6.8. feladat szerint $H_AN_A \cdot H_AA = H_AB^2$. Itt a H_AB szakasz hosszát ismerjük, a bal oldal pedig $x(x+f)$ alakba írható, ahol $f = N_AA$ jelöli az A-ból induló belső szögfelező hosszát. Így x-re egy 1 főegyütthatójú másodfokú egyenletet kapunk, aminek konstanst tagja negatív, tehát pontosan egy pozitív megoldása van: $\sqrt{f^2/4 + d^2} - f/2$, ahol $d = H_AB$. Ez Pitagorasz tétellel szerkeszthető. Az is biztos, hogy ez a szakaszhossz kisebb d-nél, tehát a H_A körüli x sugarú kör a BC oldalt egy belső N_A pontjában fogja metszeni.

A szerkesztés mindig jó háromszöget ad, ez abból következik, hogy a kapott háromszögben $d^2 = H_AN_A \cdot H_AA$. vagyis a H_ABN_A és H_AAB háromszögek hasonlók, tehát $H_ABN_A\angle = BAH_A\angle$, utóbbi viszont egyenlő a szintén a H_AC köríven nyugvó $H_AAC\angle$ szöggel. Tehát $BAH_A\angle = H_AAC\angle$, azaz AH_A valóban a háromszög szögfelezője.

6.1. Az AC szakasz kerületi szöge (lásd az 1. ábrát) – $ABC\angle = \alpha$ – és érintő szárú kerületi szöge – $ACP\angle = \alpha$ – egyenlő egymással. Ha CH az $ACB\angle$ szögfelezője, akkor $ACH\angle = CHB\angle = \gamma$ és a $AHC\angle$ a CHB háromszög külső szöge, tehát $AHC\angle = \beta + \gamma$.



6.1M.1. ábra.

A PHC háromszögben $PHC\angle = PCH\angle = \alpha + \gamma$ tehát ez a háromszög egyenlő szárú: $PC = PH$. Q.E.D.

6.3. A beírt kör érinti a három oldalt, tehát az érintő szárú kerületi szögek tétele szerint például az $YZX\angle$ egyenlő az $CYX\angle$ szöggel. Tudjuk, hogy $CY = CX$, tehát ez a szög $90° - \gamma/2$. Ugyanígy a másik két szög $90° - \alpha/2$ és $90° - \beta/2$.

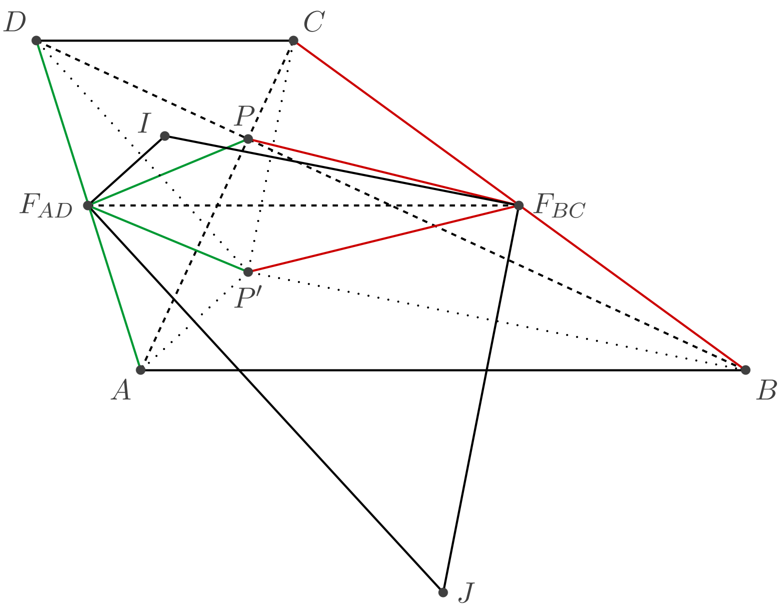
6.4. Fennáll az $\frac{AD^2}{AC^2} = \frac{BD}{BC}$ összefüggés, amiből $\frac{BD}{BC} = 9$. A részletes indoklás a Kömal[**?**] 2005. évi 9. számának 543. oldalán, a B. 3827. feladat megoldásában olvasható.)

6.5.

1. megoldás. A Thalesz tétel szerint az APD derékszögű háromszögben $F_{AD}D = F_{AD}A = F_{AD}P$, a tükrözés miatt $F_{AD}P = F_{AD}P'$, így a Thalesz tétel megfordítása szerint $AP'D$ is derékszögű háromszög. Ehhez hasonlóan a $BP'C$ háromszög is derékszögű és $F_{BC}B = F_{BC}C = F_{BC}P = F_{BC}P'$. (Lásd az 1. ábrát!)

A $DF_{AD}P'$, $CF_{BC}P'$ egyenlő szárú háromszögek DP', CP' alapjainak felezőmerőlegese messe egymást az I pontban, míg az $AF_{AD}P'$, $BF_{BC}P'$ egyenlő szárú háromszögek AP', BP' alapjai felezőmerőlegesének metszéspontja legyen J. A szerkesztés révén I a CDP' háromszög körülírt körének középpontja, míg J az ABP' háromszögé. Igazoljuk még, hogy az I, P', J pontok egy egyenesen vannak, ami egyben a feladat megoldását is jelenti.

Tekintsük az $F_{AD}IF_{BC}$, $AP'B$ háromszögeket. Ez a két háromszög középpontosan hasonló helyzetű. Valóban, $F_{AD}F_{BC} \parallel AB$, mert a trapéz középvonala párhuzamos az alapokkal, míg $F_{AD}I$ az $AP'D$ háromszög egyik középvonalának egyenes, így párhuzamos AP'-vel és $F_{BC}I$ hasonló okból párhuzamos BP'-vel. A hasonlósági középpont a trapéz AD, BC szárai meghosszabbításának Q metszéspontja, tehát Q, I és P' egy egyenesen vannak. Hasonlóan igazolható, hogy Q, J és P' is egy egyenesen vannak, amivel a feladat megoldását befejeztük.



6.5M1.1. ábra.

2. megoldás. Azt kell belátni, hogy a két körülírt körnek P'-ben közös érintője van.

A $P'DC$ körben tekintsük a $P'DC\sphericalangle$ kerületi szöget, a BAP' körben pedig a $BAP'\sphericalangle$ kerületi szöget. Ezekhez saját köreikben tartozik egy P' mellett fekvő érintő szárú kerületi szög, a $P'DC$ kör P'-beli érintőjének $P'C$-vel bezárt szöge illetve a BAP' kör P'-beli érintőjének BP'-vel bezárt szöge. A két érintő pontosan akkor egyezik meg egymással, ha a két érintő szárú kerületi szög épp kiadja a $BP'C\angle$ szöget, azaz ha

$$BP'C\sphericalangle = BAP'\sphericalangle + P'DC\sphericalangle. \tag{1}$$

Ezt alább igazoljuk a konkrét esetre. Mivel $BA\|DC$, így $BAD\sphericalangle + ADC\sphericalangle = 180°$, amiből

$$BAP'\sphericalangle + P'DC\sphericalangle = 180° - P'AD\sphericalangle - ADP'\sphericalangle. \tag{2}$$

Másrészt a $DP'A$ háromszögben

$$DP'A\sphericalangle = 180° - P'AD\sphericalangle - ADP'\sphericalangle, \tag{3}$$

amit a (2) relációval összevetve kapjuk, hogy

$$BAP'\sphericalangle + P'DC\sphericalangle = DP'A\sphericalangle \tag{4}$$

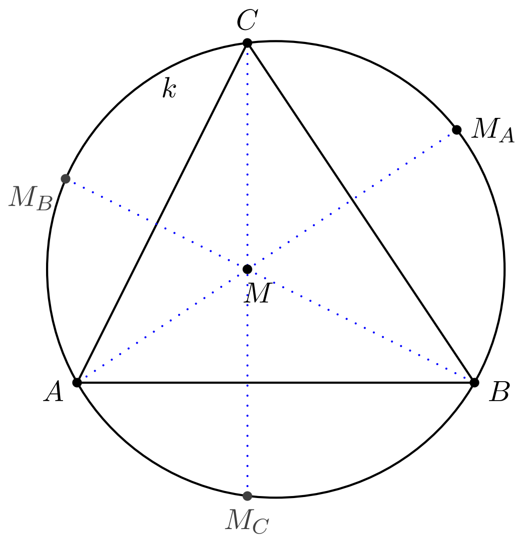
P rajta van AD és BC Thalész-körén, így $F_{BC}P = F_{BC}P'$ és $F_{DA}P = F_{DA}P'$ miatt P' is rajta van ezeken a körökön, $DP'A\angle$ és $BP'C\angle$ is derékszög. Ez –(4) és (1) összevetésével – igazolja, hogy a két kör érinti egymást. Q.E.D.

6.2. a) Ha M az ABC háromszög magasságpontja és M_C az AB oldalra vonatkozó tükörképe, akkor (lásd az 1. ábrát) a merőleges szárú szögek tétele szerint

$$AM\,BM\sphericalangle \equiv CACB\sphericalangle \pmod{180°} \tag{1}$$

a tükrözés miatt pedig

$$AM\,BM\sphericalangle \equiv -AM_C\,BM_C\sphericalangle \equiv BM_C\,AM_C\sphericalangle \pmod{180°}. \tag{2}$$



6.2M.1. ábra.

A (1), (2) relációk összevetéséből látjuk, hogy az AB szakasz egyenlő szögben látszik C-ből és M_C-ből, tehát a A, B, C, M_C pontok egy körön vannak. Hasonlóan igazolható, hogy M_B és M_A is illeszkedik az ABC háromszög körülírt körére.

b) Amikor az AB oldal felezőpontjára tükrözünk, akkor az A, B pontok kicserélődnek, míg M egy M'_C pontba képződik. A középpontos tükrözés megtartja az irányított szöget, tehát

$$AM\,BM\sphericalangle \equiv BM'_C\,AM'_C\sphericalangle \quad (\text{mod } 180°), \tag{3}$$

így a (1) összefüggés figyelembevételével

$$CB\,CSA\sphericalangle \equiv BM'_C\,AM'_C\sphericalangle \quad (\text{mod } 180°), \tag{4}$$

tehát az AB szakasz egyenlő szögben látszik C-ből és M'_C-ből. Innen az a) részhez hasonlóan fejezhető be a bizonyítás.

6.5. Jelölje a háromszög magasságpontját M, egy azt tartalmazó tetszőleges egyenest m, tükörképeiket az AC, BC, BA oldalakra rendre M_B, M_A, M_C illetve m_B, m_A, m_C, magukat a tükrözéseket t_B, t_A, t_C (lásd az 1. ábrát).

Mivel

$$t_B(CM_B) = CM, \qquad t_A(CM) = CM_A, \qquad \text{így} \qquad t_A(t_B(CM_B)) = CM_A,$$

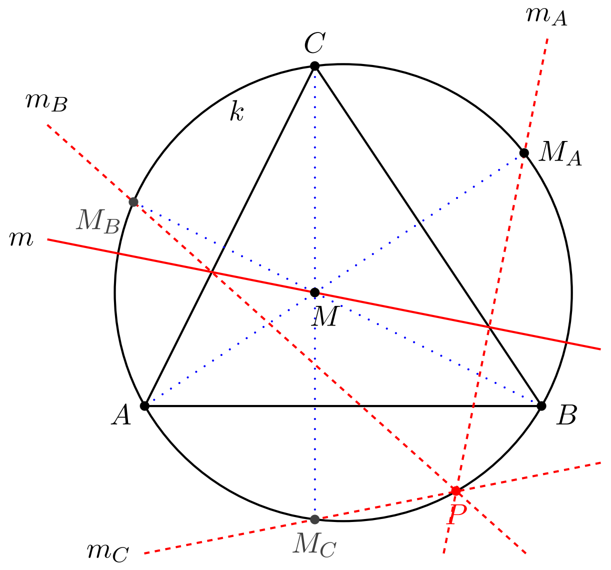
és mivel

$$t_B(m_B) = m, \qquad t_A(m) = m_A, \qquad \text{így} \qquad t_A(t_B(m_B)) = m_A.$$

A $t_A \circ t_B$ transzformáció egy forgatás, így minden egyenes ugyanakkora szöggel fordul:

$$CM_B\,CM_A\sphericalangle \equiv m_B m_A\sphericalangle,$$

azaz az $m_B \cap m_A = D_C$ metszéspont az $M_A M_B$ szakasznak ugyanazon a látókörén van, mint a C pont, tehát az ABC háromszög körülírt körén. A D_C pont tehát az m_A egyenesnek (és egyúttal az m_B egyenesnek) az ABC háromszög körülírt körével való metszéspontja; az a metszéspont, amelyik M_A-tól (illetve M_B-től) különbözik, illetve csak akkor egyezik meg M_A-val (M_B-vel), ha m_A (ill. m_B) a körülírt kör M_A-beli (M_B-beli) érintője. A D_C pontot tehát már maga m_A és a körülírt kör egyértelműen meghatározza, az m_A, m_C egyenesek D_B metszéspontja ugyanez a pont lesz, azaz az m_A, m_B, m_C egyenesek itt metszik egymást.

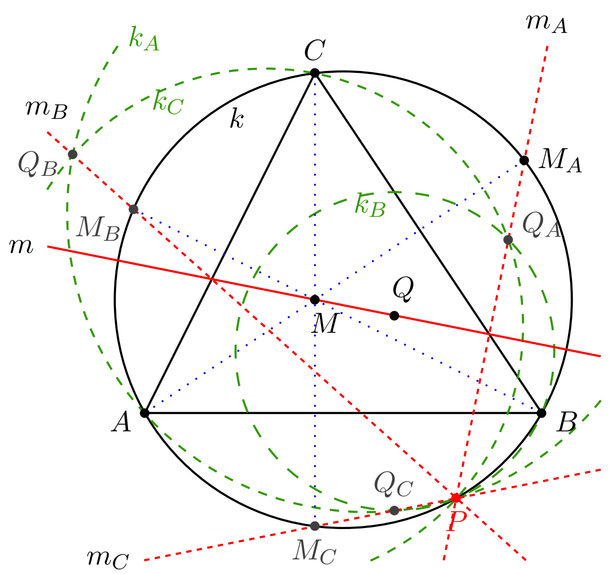


6.5M.1. ábra.

6.6. Ha M az ABC háromszög magasságpontja, míg P a körülírt kör tetszőleges pontja és M_A az M tükörképe a BC egyenesre, akkor legyen m az M_AP egyenes (illetve $M_A = P$ esetén a körülírt kör P-beli érintőjének) BC-re vonatkozó tükörképe. Az előző tétel szerint m-nek a háromszög oldalaira vonatkozó tükörképei P-ben metszik egymást, így P-nek az oldalegyenesekre vonatkozó tükörképei m-en vannak.

6.8. A $Q = M$ elfajult esetben $k = k_A = k_B = k_C$ és a körülírt kör tetszőleges P pontjára igaz a fenti állítás, a kapott egyenes a P Simpson egyenese.

$Q \neq M$ esetén tekintsük az $m = QM$ egyenest, jelölje az AC-re vonatkozó tükrözést t_B, az BC-re vonatkozót t_A, tehát $Q_A = t_A(Q)$, $Q_B = t_B(Q)$ és legyen $m_B = t_B(m)$, $m_A = t_A(m)$. Mivel $Q \in m$, így $Q_B \in m_B$ és $Q_A \in m_A$, korábban pedig láttuk, hogy $P \in m_A$, $P \in m_B$ (lásd az 1. ábrát).



6.8M.1. ábra.

$$t_B(PQ_B) = t_B(m_B) = m, \qquad t_A(m) = m_A = PQ_A, \qquad \text{így} \qquad t_A(t_B(PQ_B)) = PQ_A,$$

és mivel

$$t_B(CQ_B) = CQ, \qquad t_A(CQ) = CQ_A, \qquad \text{így} \qquad t_A(t_B(CQ_B)) = CQ_A.$$

A $t_A \circ t_B$ transzformáció egy forgatás, így minden egyenes ugyanakkora szöggel fordul:

$$PQ_B\,PQ_A\sphericalangle \equiv CQ_B\,CQ_A\sphericalangle,$$

tehát C és P a Q_AQ_B szakasz egy látókörén van, azaz P illeszkedik k_C-re. Hasonlóan igazolható, hogy P illeszkedik a k_A, k_B körökre is.

6.1. Adott tehát az ABC háromszög AB oldalának hossza, a vele szemben fekvő γ szög és a másik két oldal összege. „Egyenesítsük” ki ezt az utóbbi adatot, azaz tekintsük az AC félegyenesnek azt a B' pontját, amelyre $AB' = AC + CB$. Ez azt is jelenti, hogy $BC = B'C$, tehát a BCB' háromszög egyenlőszárú és a BB' alapján fekvő szögek $\gamma/2$ nagyságúak. Vagyis $AB'B = \gamma/2$. Ez viszont azt jelenti, hogy a B' pont rajta van az AB feletti $\gamma/2$ szögű látóköríven. Ha e látókörívnek és az A középpontú, $AC + CB$ – megadott hosszúságú – sugárral húzott körnek van közös pontja, akkor az lesz B'. Ezután meghúzzuk a BB' szakasz felezőmerőlegesét. Ha ez metszi az AB' szakaszt, akkor a metszéspont lesz a C pont.

Ha a C pont létrejön, akkor a szerkesztés jó, hiszen $B'C = BC$ és így $AC + CB = AB'$, ami éppen a megadott hosszúság. Másrészt az ABC háromszög C-nél levő szöge a $\gamma/2$ szögű egyenlőszárú $BB'C$ háromszög külső szöge, tehát éppen γ-val egyenlő.

A szerkesztés diszkussziója: B' a kör és a körív metszéspontja, könnyen látható, hogy vagy egy metszészpont van, vagy egy sem. Utóbbi esetben nincs az adatoknak megfelelő háromszög. (Kvantitatíven trigonometriával számítható ki, hogy ez az eset mikor fordul elő.) A C pont akkor jön létre, ha $AB' > AB$, vagyis ha $a + b > c$, azaz ha c-re teljesül a háromszögegyenlőtlenség. Ellenkező esetben nincs az adatoknak megfelelő háromszög.

Tehát a feladatnak vagy 1 vagy 0 háromszög a megoldása.

6.2. Nyilván a kör AB-től legtávolabbi pontja lesz a megfelelő C csúcs. Ha AB átmérő, akkor mindkét $\widehat{AB}$ felezőpontja jó, ha AB nem átmérő, akkor a nagyobbik $\widehat{AB}$ felezőpontja a megfelelő C.

6.3. A feladat átfogalmazható úgy, hogy keressük azt a C pontot a kör kerületén, amelyre az $AC + BC$ távolságösszeg a lehető legnagyobb.

Megszokhattuk már – l. például a 6.1. szerkesztési feladat megoldását –, hogy ilyenkor érdemes „kiegyenesíteni” ezt a távolságösszeget. Vagyis tekintsük azt a B' pontot az AC félegyenesen, amelyre $AB' = AC + BC$, vagy másképp: $CB' = CB$. A BCC' háromszög egyenlőszárú és szárszöge (C-nél fekvő szöge) $180 - \gamma$, tehát $CB'B = \gamma/2$. Ez azt jelenti, hogy a B' csúcs az AB feletti $\gamma/2$ szögű látóköríven fut végig, ha C a γ szögű látóköríven, azaz a megadott kör megfelelő $\widehat{AB}$ körívén fut végig.

Az AB' szakasz ennek a $\gamma/2$ szögű körívnek húrja. Nyilván akkor a legnagyobb, ha e körív átmérője, azaz ha átmegy a körív O középpontján. De a középponti és kerületi szögek tétele szerint $AOB = \gamma$, így O rajta van az eredeti K körön. Közelebbről: O az $\widehat{AB}$ körív felezőpontja, hiszen $AO = OB$. Az AB' szakasz, s így az ABC háromszög tehát akkor lesz maximális kerületű, ha $C = O$ az $\widehat{AB}$ körív felezőpontja.

6.4. Nyilván a szabályos háromszög területe a legnagyobb. Legyen ugyanis ABC háromszög a körbe írt háromszög. Ha nem mind a három csúcsa van a kör kerületén, akkor a háromszög egy belső pontját összekötve a csúcsokkal a félegyenesek és a kör metszéspontjait választva csúcsnak nagyobb területű háromszöget kapunk.

Ha az ABC háromszög köré írt köre az adott kör és például $AC \neq BC$, akkor a 6.2. feladat megoldása szerint nagyobb területű háromszöget kapunk, ha a C csúcsot a megfelelő $\widehat{AB}$ ív felezőpontjába toljuk.

6.5. Nyilván a szabályos háromszög kerülete a legnagyobb. Legyen ugyanis ABC háromszög a körbe írt háromszög. Ha nem mind a három csúcsa van a kör kerületén, akkor a háromszög egy belső pontját összekötve a csúcsokkal a félegyenesek és a kör metszéspontjait választva csúcsnak nagyobb kerületű háromszöget kapunk (l. a 9.1. feladatot).

Ha az ABC háromszög köré írt köre az adott kör és például $AC \neq BC$, akkor a 6.3. feladat megoldása szerint nagyobb kerületű háromszöget kapunk, ha a C csúcsot a megfelelő $\widehat{AB}$ ív felezőpontjába toljuk.

6.6. A megoldás csak annyit bizonyít, hogy a a 6.2. feladat megoldásában adott módszerrel minden, a szabályos háromszögtől különböző háromszögből tudunk nagyobb területűt szerkeszteni. De ez még nem árul el semmit arról, hogy esetleg más módszerrel a szabályos háromszögnél is nem tudunk-e nagyobb területűt szerkeszteni. Ez nem kizárt! Előfordulhat ugyanis, hogy *nincs* legnagyobb területű a körbe írható háromszögek közül!

A megoldásunk gondolatmenetének hiányosságát találóan mutatja a következő példa. Első lépésként állítjuk, hogy ha n egynél nagyobb egész szám, akkor négyzetre emeléssel nagyobb egész számot kapunk. Ez felel meg a 6.2. feladat megoldásának, ahol lényegében azt láttuk be, hogy ha a körbe írt háromszög nem szabályos háromszög, akkor két nem egyenlő oldalát egyenlővé téve nagyobb területűt kapunk. Ezután a 6.4. feladat megoldásában kijelentettük, hogy tehát a szabályos háromszög területe a legnagyobb. Ugyanígy az egész számok esetében arra a következtetésre juthatunk, hogy tehát az egy a legnagyobb pozitív egész szám.

Ha azonban tudnánk, hogy *van* legnagyobb területű a körbe írt háromszögek közül, akkor már jó volna a 6.4. feladat megoldása. Azt azonban korántsem olyan egyszerű bizonyítani, hogy valóban létezik legnagyobb területű a körbe írt háromszögek között. Ezért más utat fogunk választani a 6.4. feladat *teljes* megoldásához. (L. a 6.8. feladat megoldását.)

Természetesen pontosan ugyanez elmondható a kerület esetén is.

6.7. Az 1. lépést csak egyszer kell megtennünk. A 3. lépést kell tehát vizsgálnunk. Ha C-nél γ szög van, akkor e lépés végrehajtása után a C-nél levő szög nem fog változni, a másik két szög viszont $90 - \gamma/2$-re módosul. Ha tehát γ fokokban mérve irracionális merőszámú, akkor e lépés után minden szögének irracionális lesz a fokokban mért mérőszáma, így a további lépésekben is minden szögének mérőszáma irracionális lesz. Vagyis a szabályos háromszöghöz sosem érünk el. Márpedig ha a háromszög nem szabályos, akkor az eljárás folytatható.

Azt kaptuk tehát, hogy ha a C-nél levő szög mérőszáma fokban irracionális, akkor az eljárásunk nem ér véget véges sok lépésben. Természetesen így véges sok lépésben nem is jutunk el a szabályos háromszöghöz.

6.8. Csak a 3. lépést kell végrehajtanunk. Ha a C-nél fekvő γ szöget $60+\delta$ alakban írjuk (δ lehet negatív is), akkor a 3. lépés után a másik két szög $60 - \delta/2$ lesz. A következő alkalommal tehát erre kell végrehajtanunk a 3. lépést. Ez azt jelenti, hogy a szárszögnek a $60°$-tól való eltérése minden lépésben pontosan feleződik. Vagyis ha kezdetben nem volt nulla, akkor sosem válik nullává.

Azt kaptuk, hogy ha a háromszög egyik szöge $60°$-os, akkor egy lépés után a szabályos háromszöget kapjuk, viszont *egyetlen más esetben sem* ér véget az eljárás véges sok lépésben.

6.9. Ha az ABC nem-szabályos háromszögből sikerül egy olyan háromszöget előállítanunk, amelynek egyik szöge 60°és a területe nagyobb, akkor a következő lépésben kész vagyunk, hiszen a következő lépésben egy 60°-os egyenlőszárú háromszöghöz, tehát a szabályos háromszöghöz jutunk a terület növelésével. Nyilván feltehetjük, hogy az ABC háromszög egyik szöge sem 60°-os, hiszen ebben az esetben a 6.7. feladat eljárása egy lépésben a szabályos háromszöget adja.

Tegyük fel tehát, hogy az ABC háromszögben nincs 60°-os szög és tükrözzük tehát a C csúcsot az AB szakasz felezőmerőlegesére és legyen a tükörkép C'. Ez is rajta van a körön. Ha a C csúcsot a $\widehat{CC'}$ íven mozgatjuk, akkor az ABC háromszög területe nő. Ha tehát ezen az íven van olyan X pont, amelyre például az ABX szög 60°-os, akkor kész vagyunk. Ehhez arra van szükség, hogy az ABC szög kisebb legyen 60°-nál és au ABC' szög nagyobb legyen 60°-nál. A tükrözés miatt az ABC' szög egyenlő a BAC szöggel. Tehát a feltétel úgy szól, hogy az ABC háromszög A-nál fekvő szöge kisebb, a B-nél fekvő pedig nagyobb legyen 60°-nál.

Ha tehát C-t úgy választjuk, hogy A-nál legyen a háromszög legkisebb, B-nél a legnagyobb szöge, akkor biztosan van megfelelő X pont a $\widehat{CC'}$ köríven. Tehát van olyan ABX háromszög, amelynek területe nagyobb ABC háromszög területénél és amelynek egyik szöge 60°-os. Ebből pedig a 6.7. feladat eljárásával már egy lépésben a szabályos háromszöghöz jutunk.

6.10. A 6.9. feladat megoldásának eljárása most is alkalmazható. Annyit kell belátnunk, hogy az ott szereplő $\widehat{CC'}$ íven fekvő X pontokra igaz, hogy az ABX háromszögnek nemcsak a területe, hanem a kerülete is nagyobb az ABC háromszögénél.

Jelöljük F-fel az (AB-t nem tartalmazó) $\widehat{CC'}$ ív felezőpontját. Minthogy a $\widehat{CC'}$ ív szimmetrikus az AB szakasz felezőmerőlegesére, elég azt belátnunk, hogy a $\widehat{CF}$ ív tetezőleges X pontjára igaz az állításunk.

Szerkesszük meg a$\widehat{CF}$ ív minden X pontjához az AX félegyenesnek azt az X' pontját, amelyre $AX' = AX + XB$. A **??** feladatban láttuk, hogy ezek az X' pontok egy olyan körívet határoznak meg, amelynek középpontja éppen az F pont. Tehát ha az X pontot a C-től az F-ig futtatjuk, akkor a hozzátartozó AX' szakasz hossza az $X = C$ helyzettől az $X = F$ helyzetig egyfolytában nő. Következésképp az AXB háromszög kerülete is egyfolytában nő.

Ezzel beláttuk, hogy a 6.9. feladat megoldásának eljárása most is alkalmazható: az ott alkalmazott eljárás két lépsben a terület *és* a kerület növelésével vezet a szabályos háromszöghöz.

6.11. Igen. Most már tudjuk, hogy ha egy háromszög nem szabályos, akkor legfeljebb két területet és kerületet is növelő lépéssel eljutunk belőle a szabályos háromszöghöz.

Ez az eljárás tehát egyszerre bizonyítja, hogy a szabályos háromszög a maximális kerületű és területű és ad véges eljárást arra, hogy hogyan juthatunk el adott háromszögből a szabályoshoz véges sok terület- és kerületnövelő lépéssel.

6.1. Kétféle háromszögben fordul elő a megadott tulajdonság: az egyenlő szárúban ($AB = AC$) és abban, amelyikben $BAC\angle = 60°$. Ezt alább indokoljuk.

Az IN_BA, IN_CA háromszögek két oldala ($AI = AI$, és $IN_B = IN_C$) és az egyikkel szemközti szög $IAN_B\angle = N_CIA\angle$ egyenlő. Ha végiggondoljuk a háromszög szerkesztését ezekből az adatokból, akkor láthatjuk, hogy most az $IN_CA\angle$, $IN_BA\angle$ szögek vagy egyenlőek, vagy 180°-ra egészítik ki egymást. Ezek a szögek a BN_CC, CN_BB háromszögek külső szögei, tehát kifejezhetők az eredeti háromszög szögeivel: $IN_CA\angle = \beta + \frac{\gamma}{2}$, míg $IN_BA\angle = \gamma + \frac{\beta}{2}$.

Ha $IN_CA\angle = IN_BA\angle$, akkor $\beta = \gamma$, az ABC háromszög egyenlő szárú. Ha $IN_CA\angle + {} + IN_BA\angle = 180°$, akkor $\beta + \gamma = 120°$, azaz $\alpha = 60°$.

Megfordítva, ha $\alpha = 60°$, akkor $\frac{3}{2}(\beta + \gamma) = 180°$, azaz $IN_CA\angle + IN_BA\angle = 180°$, így az IN_BAN_C négyszög húrnégyszög, amelyben az egymással egyenlő $IAN_B\angle$, $N_CAI\angle$ szögekhez egyenlő hosszúságú húrok tartoznak, azaz $IN_B = IN_C$.

6.2. Jelölje az A pont e egyenesre tükrözött képét A'. Ismeretes, hogy az M pont az $A'B$ egyenes és e metszéspontja.

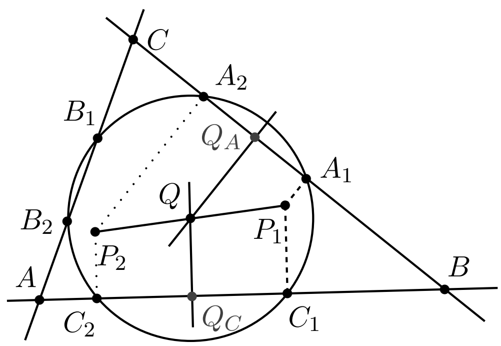
Ha $AA'B\angle = \alpha$, akkor az $AA'M$ egyenlő szárú háromszög M-nél fekvő külső szöge $AMB\angle = 2\alpha$. Az N pont egyforma messze van az A, B pontoktól és illeszkedik e-re, így A'-től is ugyanakkora távolságra van, mint A-tól és B-től. Az $AA'B$ háromszög körülírt körének középpontja N, így ebben a körben az AB szakasz $AA'B\angle$ kerületi szögének és ANB középponti szögének összevetéséből $ANB\angle = 2AAB\angle = 2\alpha$.

Az M, N pontok az AB egyenes ugyanazon oldalán vannak és belőlük azonos szögben látszik az AB szakasz, így ez a négy pont egy körön van.

6.6.

1. megoldás. a) Jelölje P_2 a C_2-ben AB-re és az A_2-ben BC-re állított merőleges metszéspontját és tekintsük a C_1C_2, P_1P_2, A_1A_2 szakaszok Q_C, Q, Q_A felezőpontjait (lásd a 2. ábrát). Mivel a C_1P_1, C_2P_2 egyenesek merőlegesek az AB oldalegyenesre, így a $P_1C_1C_2P_2$ (esetleg hurkolt) trapéz Q_CQ középvonala is merőleges AB-re, tehát Q_CQ a C_1C_2 szakasz felezőmerőlegese. Ehhez hasonlóan mutatható meg, hogy az adott kör A_1A_2 húrjának felezőmerőlegese is átmegy Q-n, azaz Q a kör középpontja.

Jelölje P_2' a C_2-ben AB-re és a B_2-ben CA-ra állított merőleges metszéspontját. Ha a B_1-ben CA-ra állított merőleges is átmegy P_1-en, akkor az előzőekhez hasonlóan igazolható, hogy a $P_2'P_1$ szakasz felezőpontja a kör középpontja, Q. Mivel P_1 és Q adott, így $P_2' = P_2$, az a) rész állítását beláttuk.



6.6M1.2. ábra.

c) Megmutatjuk, hogy az $A_1P_1C_1$, $C_2P_2A_2$ háromszögek hasonlóak, amiből követlkezik, a bizonyítandó arányosság.

Azt mutatjuk meg, hogy az egyik háromszög szögei megegyeznek a másik háromszög szögeivel. Az adott körben az A_2C_1 húr kerületi szögei:

$$A_2C_2C_1\sphericalangle \equiv A_2A_1C_1\sphericalangle \pmod{180^\circ}, \tag{1}$$

míg

$$C_1C_2P_2\sphericalangle \equiv P_1A_1A_2\sphericalangle \pmod{180^\circ}, \tag{2}$$

hiszen mindkettő derékszög. Az (1), (2) egyenletek összege:

$$A_2C_2P_2\sphericalangle \equiv P_1A_1C_1\sphericalangle \pmod{180^\circ}, \tag{3}$$

ami épp azt fejezi ki, hogy az egyik háromszög P_1A_1 és A_1C_1 oldalegyenesének szöge megegyezik a másik háromszög A_2C_2 és C_2P_2 oldalegyenesének szögével. Teljesen hasonlóan igazolható, hogy az első háromszög A_1C_1 és C_1P_1 oldalegyenesének szöge megegyezik a másik háromszög P_2A_2 és A_2C_2 oldalegyenesének szögével. Ebből már a 3.6. feladat a) része szerint következik a két háromszög hasonlósága.

b) Írjuk át a (1) összefüggést az alábbi alakba:

$$A_2C_2B\sphericalangle \equiv BA_1C_1\sphericalangle \pmod{180^\circ}. \tag{4}$$

Vegyük észre, hogy az $A_2P_2C_2B$, $BA_1P_1C_1$ pontnégyesek is egy-egy körönvannak, tudniillik a BP_2 illetve a BP_1 szakasz Thalesz körén. Ezekben is alkalmazhatjuk a kerületi szögek tételét:

$$A_2C_2B\sphericalangle \equiv A_2P_2B\sphericalangle \pmod{180^\circ}, \tag{5}$$

$$BA_1C_1\sphericalangle \equiv BP_1C_1\sphericalangle \pmod{180^\circ}. \tag{6}$$

(5) és (7) összevetése (4)-gyel adja a

$$A_2P_2B\sphericalangle \equiv BP_1C_1\sphericalangle \pmod{180^\circ} \tag{7}$$

relációt és figyelembe véve, hogy az A_2P_2B, BP_1C_1 háromszögekben

$$A_2P_2B\sphericalangle + P_2BA_2\sphericalangle + 90^\circ \equiv BP_1C_1\sphericalangle + C_1BP_1\sphericalangle + 90^\circ \equiv 0 \pmod{180^\circ}$$

kapjuk, hogy

$$P_2BA_2\sphericalangle \equiv C_1BP_1\sphericalangle \pmod{180^\circ},$$

ami egyenértékű a bizonyítandó összefüggések egyikével:

$$P_2BC\sphericalangle \equiv ABP_1\sphericalangle \pmod{180^\circ}.$$

A többi egyenlőség ehhez hasonlóképpen igazolható.

2. megoldás. c) Ha már tudjuk, hogy a kör középpontja a P_1P_2 szakasz Q felezőpontja, akkor érdemes Q-ra középpontosan tükrözni az ábrát, majd felírni többféleképpen a P_1 pontnak a körre vonatkozó hatványát (lásd a szelő-tételt a 11.1.–11.2. feladatokban).

6.12. a) Legyen az adott háromszög $A_1B_1C_1$, a szerkesztendő szabályos háromszög ABC, melynek oldalegyeneseit a szokásos módon jelöljük, tehát $A_1 \in a = BC$, $B_1 \in b = CA$, $C_1 \in$ $\in c = AB$.

Az egyenesek irányított szögeivel számolva:

$$ab\sphericalangle \equiv \pm 60^\circ \pmod{180^\circ}, \quad bc\sphericalangle \equiv \pm 60^\circ \pmod{180^\circ}, \quad ca\sphericalangle \equiv \pm 60^\circ \pmod{180^\circ},$$

továbbá

$$ab\sphericalangle + bc\sphericalangle + ca\sphericalangle \equiv \pm 0^\circ \pmod{180^\circ},$$

azaz vagy

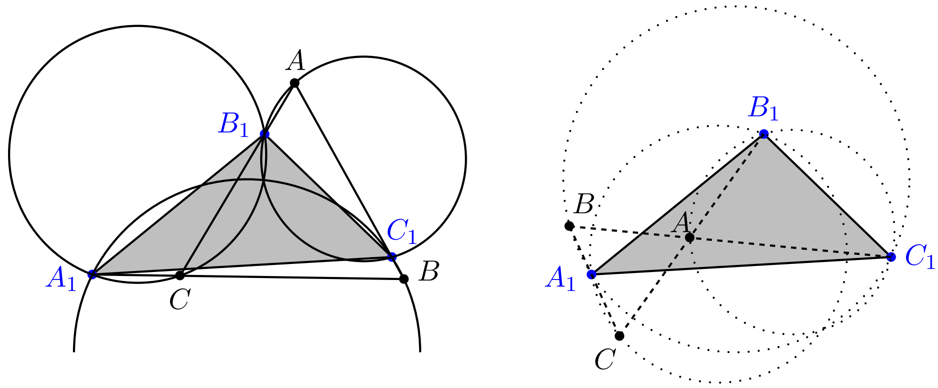
$$ab\sphericalangle \equiv bc\sphericalangle \equiv ca\sphericalangle \equiv 60^\circ \pmod{180^\circ},$$

vagy

$$ab\sphericalangle \equiv bc\sphericalangle \equiv ca\sphericalangle \equiv -60^\circ \pmod{180^\circ}.$$

Az első esetben az A, B, C csúcsok a B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 szakaszok (irányított szakaszok) 60°-os ($\bmod 180^\circ$) $k^+{}_A$, $k^+{}_B$, $k^+{}_C$ látókörein vannak, az utóbbi esetben pedig a -60°-os ($\bmod 180^\circ$) $k^-{}_A$, $k^-{}_B$, $k^-{}_C$ látókörein.

Induljunk ki a $k^+{}_A$ kör tetszőleges A pontjából! Képezzük az AC_1 egyenes ($A = C_1$ esetén a $k^+{}_A$ kör C_1-beli érintője) és a $k^+{}_B$ kör C_1-től különböző B metszéspontját (illetve legyen



6.12M.1. ábra.

$B = C_1$, ha az egyenes C_1-ben érinti $k^+{}_B$-t. Legyen ehhez hasonlóan C a BA_1 egyenes és a $k^+{}_C$ kör A_1-től különböző metszéspontja. Jelölje a B_1A, AC_1B, BA_1C, CB_1 egyeneseket rendre b, c, a, b'. A szerkesztés révén ezen egyenesek irányított szögei:

$$bc\sphericalangle \equiv ca\sphericalangle \equiv ab'\sphericalangle \equiv 60° \pmod{180°},$$

így

$$bb'\sphericalangle \equiv 0° \pmod{180°}.$$

Mivel b és b' is átmegy B_1-en így ez a két egyenes egybe is esik. Ez épp azt jelenti, hogy a szerkesztésből kapott ABC háromszög szabályos és oldalaira illeszkednek a megadott pontok. Így végtelen sok megfelelő szabályos háromszöget kapunk és ha ehhez hasonlóan képezzük a $k^-{}_C$, $k^-{}_A$, $k^-{}_B$ látókörökre illeszkedő megoldásokat is, akkor az összeset megkapjuk.

b) A 6.3. feladat eredménye szerint A-t és B-t a $k^+{}_A$, $k^+{}_B$ körök (vagy $k^-{}_A$ és $k^-{}_B$) azon C_1-en átmenő szelőjén kell választani, amely párhuzamos ezen körök centrálisával.

7. A terület

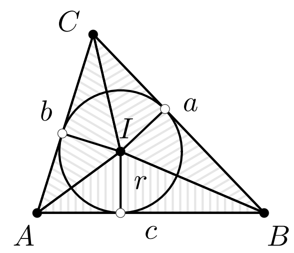
7.1. Jelölje háromszög csúcsait A, B és C, beírt körének középpontját I. Tekintsük az ABI, BCI, CAI háromszögeket. Az ABI háromszög területe az AB alap és a hozzá tartozó magasság szorzatána fele. Az AB alaphoz tartozó magasság épp r, így a terület $\frac{c\cdot r}{2}$. A másik két háromszög területére(lásd a **??**. ábrát) is hasonló formula írható fel, ez a három kis háromszög átfedés nélkül tölti ki az ABC háromszöget, így annak T területe:

$$T = \frac{c\cdot r}{2} + \frac{b\cdot r}{2} + \frac{a\cdot r}{2} = \frac{(a+b+c)\cdot r}{2} = s\cdot r.$$

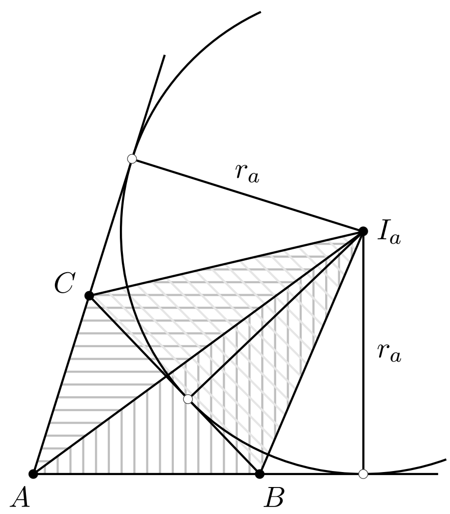
7.2. Az 1. ábrán A, B, C a háromszög csúcsait, I_a pedig a hozzáírt kör középpontját jelöli.

Az ABI_A, BCI_A, CAI_A háromszögek AB, BC, CA alaphoz tartozó magassága r_a, így területük rendre $\frac{c\cdot r}{2}$, $\frac{a\cdot r}{2}$, $\frac{b\cdot r}{2}$. Az ABI_A, CAI_A háromszögek egymást nem fedik át és pont azt a tartományt takarják le, amit az egymással diszjunkt ABC, BCI_A háromszögek takarnak le együtt. Így az ABC háromszög területe:

$$T = \frac{c\cdot r_a}{2} + \frac{b\cdot r_a}{2} - \frac{a\cdot r_a}{2} = \frac{(-a+b+c)\cdot r_a}{2} = \left(\frac{(a+b+c)}{2} - a\right)\cdot r_a = (s-a)\cdot r_a.$$



7.1M.1. ábra.



7.2M.1. ábra.

7.3. a) Az IB, I_aB egyenesek az ABC háromszög B-nél fekvő szögének belső és küldő szögfelezői, így merőlegesek egymásra (lásd az 1. ábrát). Az IUB háromszög

$$IU, \qquad UB, \qquad BI$$

oldalai rendre merőlegesek az BU_aI_a háromszög

$$BU_a, \qquad U_aI_a, \qquad I_aB$$

oldalaira, így e két háromszög szögei egyenlők, a két háromszög hasonló.

b) A hasonlóságból $\frac{IU}{UB} = \frac{BU_a}{U_aI_a}$. Ismeretes, hogy $BU = s - b$, mígv $BU_a = s - c$, így

$$\frac{r}{s-b} = \frac{s-c}{r_a},$$

azaz

$$rr_a = (s-b)(s-c). \tag{1}$$

Másrészt a 7.1-7.2. feladatok eredménye szerint

$$T = s \cdot r = (s-a)r_a,$$

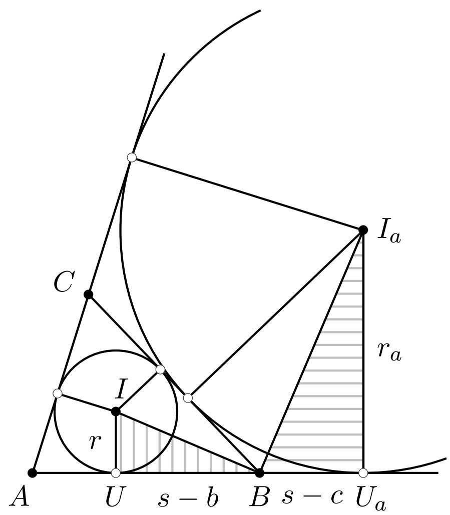
amiből

$$T^2 = s(s-a) \cdot rr_a,$$

így (1) figyelembevételével

$$T^2 = s(s-a)(s-b)(s-c).$$

Ez a nevezetes Heron-képlet.



7.3M.1. ábra.

7.4. Bővítsünk T-vel és vegyük figyelembe, hogy

$$\frac{T}{m_a}=\frac{a}{2},\qquad \frac{T}{m_b}=\frac{b}{2},\qquad \frac{T}{m_c}=\frac{c}{2},\qquad \frac{T}{r}=\frac{a+b+c}{2}.$$

Utóbbival kapcsolatban lásd a 7.1. feladatot

7.5. Eredmény:

$$\frac{-1}{m_a}+\frac{1}{m_b}+\frac{1}{m_c}=\frac{1}{r_a},$$

Amit T-vel való bővítéssel a 7.4. feladat mintájára a 7.1-7.2. feladatok eredményét is felhasználva igazolhatunk.

7.4. Jelölje a C csúcs illetve a P pont AB egyenestől mért távolságát m_c illetve m_p, azaz

$$2T_{AC_1C}=AC_1\cdot m_c,\qquad 2T_{C_1BC}=C_1B\cdot m_c,$$

illetve

$$2T_{AC_1P}=AC_1\cdot m_p,\qquad 2T_{C_1BP}=C_1B\cdot m_p.$$

Az AC_1P, APC háromszögek nem fedik át egymást és együtt épp az AC_1C háromszöget adják ki, így

$$2T_{APC}=2T_{AC_1C}-2T_{AC_1P}=AC_1\cdot m_c-AC_1\cdot m_p=AC_1\cdot(m_c-m_p),$$

és ehhez hasonlóan

$$2T_{CPB}=C_1B\cdot(m_c-m_p),$$

ami igazolja az állítást.

7.12. Jelölje a háromszög A, B, C csúcsokhoz tartozó magasságait m_A, m_B és m_C, az XYZ háromszög (előjeles) területét T_{XYZ}. Írjuk át a Ceva tételben ((lásd a 7.5. feladatot)) szereplő arányokat az alábbi módon:

$$\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{AC_1\cdot m_A}{C_1B\cdot m_A}=\frac{T_{ACC_1}}{T_{C_1CB}}=\frac{AC\cdot CC_1\cdot\sin ACC_1\sphericalangle}{CC_1\cdot CB\cdot\sin C_1CB\sphericalangle}=\frac{AC\cdot\sin ACC_1\sphericalangle}{CB\cdot\sin C_1CB\sphericalangle},$$

és ehhez hasonlóan

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{BA \cdot \sin BAA_1\sphericalangle}{CA \cdot \sin C_1CB\sphericalangle},$$

$$\frac{CB_1}{B_1A} = \frac{CB \cdot \sin CBB_1\sphericalangle}{AB \cdot \sin B_1BA\sphericalangle}.$$

A fenti három összefüggés szorzatából kihagyható a $\frac{AC}{CB} \cdot \frac{BA}{CA} \cdot \frac{CB}{AB} = 1$ mennyiség és kapjuk, hogy

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{\sin ACC_1\sphericalangle}{\sin C_1CB\sphericalangle} cdot \frac{\sin BAA_1\sphericalangle}{\sin C_1CB\sphericalangle} \cdot frac \sin CBB_1\sphericalangle \sin B_1BA\sphericalangle.$$

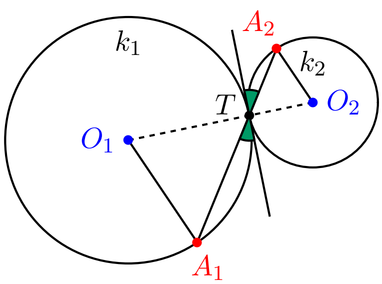
Ez az összefüggés igazolja, hogy a trigonometrikus Ceva tétel ekvivalens a Ceva tétellel.

8. Középpontos nagyítás

8.4. Rajzoljuk be a két kör T-beli közös érintőjét (lásd a **??**. ábrát)! A k_1 kör A_1T húrjának és a k_2 kör TA_2 húrjának érintő szárú kerületi szögei egyenlőek, hiszen csúcsszögek, így e húrok középponti szögei is egyenlők:

$$A_1O_1T\sphericalangle = TO_2A_2\sphericalangle. \tag{1}$$

Mivel O_1, T és O_2 egy egyenesen vannak, így (1) azt fejezi ki, hogy az $A_1O_1T\sphericalangle$, $TO_2A_2\sphericalangle$ szögek váltószögek, azaz A_1O_1 és O_2A_2 párhuzamosak.



8.4M.1. ábra.

8.2.

1. megoldás. Induljunk ki a kész 1. ábrából, legyenek a megszerkesztendő húron az n nagyobb kör és a k kisebb kör metszéspontjai ebben a sorrendben: N_1, K_1, K_2, N_2. Mivel K_1 az N_1K_2 szakasz felezőpontja és K_2 a k kör pontja, így a k kör K_1-re középpontosan tükrözött képe, k', átmegy az N_1 ponton.

A szerkesztés innen egyszerű:

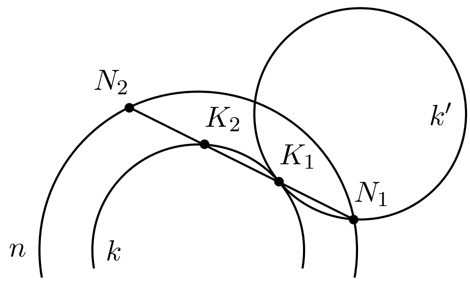
1. Válasszuk K_1-nek a k kör tetszőleges pontját (valóban, ha egy húr megoldás, akkor a középpont körüli minden elforgatottja is megfelelő, K_1 bárhol lehet).

2. Képezzük a k kör K_2-re középpontosan tükrözött k' képét.

3. Legyen k' és n metszéspontjai N_1 és N_1'.

4. Képezzük az N_1K_1 egyenest (és $N_1'K_1$-et), ennek a körökkel alkotott további metszéspontjai legyenek K_2 és N_2 (K_2', N_2').

Ez a (két) szelő a megoldás és ennek a középpont körüli elforgatottjai.

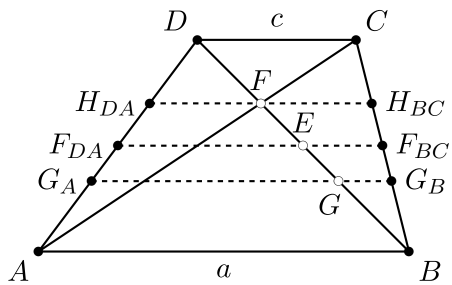


8.2M1.1. ábra.

A szerkesztés előtti gondolatmenetből következik, hogy csak ezek a jó megoldások. Ezek valóban jó szelők, mert a tükrözés miatt $N_1K_1 = N_2K_2$ és a két kör és a szelő tengelyesen szimmetrikus a K_1K_2 szakasz felezőmerőlegesére, így $K_2N_2 = K_1N_1$ is teljesül. A k egy rögzített potján átmenő megoldások száma 2, 1 vagy 0 aszerin, hogy k' metszi n-t, érinti, vagy nincs közös pontjuk, tehát szerint, hogy $3r_k > r_n$, $3r_k = r_n$ vagy $3r_k < r_n$, ahol r_k a kisebbik, r_n a nagyobbik kör sugara.

2. megoldás. A 8.2M1. megoldás jelöléseivel azt is mondhatjuk, hogy a K_1 centrumú $\lambda = 2$ arányú középpontos nagyítás k_2-t N_2-be viszi, tehát N_2 az n kör és a k kör nagyításnál származó képének metszéspontja. A diszkussziót nem részletezzük, az a 8.2M1. megoldás mintájára mehet.

8.5. a) 12 cm; **b)** 16 cm; **c)** $\frac{119}{12} \approx 9{,}91667$ cm;
d) $\frac{a+b}{2}$ illetve $\frac{2a+b}{3}$, ha az a alap felőli harmadolópontot vizsgáljuk (lásd a **??**. ábrát).
e) $\frac{2ab}{a+b}$, az alapok harmonikus közepe.



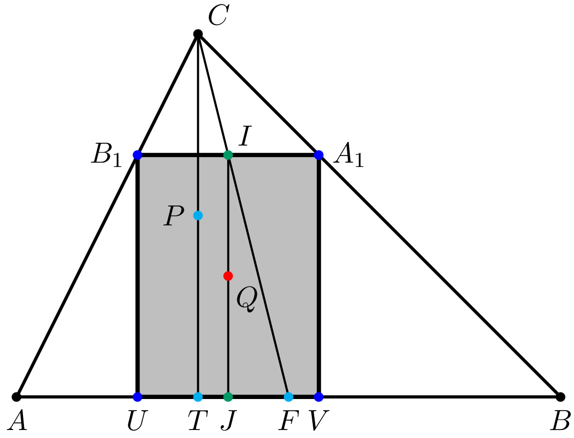
8.5M.1. ábra.

8.2. Jelölje az AB oldal felezőpontját F, a C-ből induló magasság felezőpontját P, talppontját T, a beírt téglalap csúcsait $A_1 \in BC$, $B_1 \in AC$ és $U, V \in AB$, az UV, A_1B_1 szakaszok felezőpontját rendre J és I (lásd a **??**. ábrát). A keresett Q pont az IJ szakasz felezőpontja.

A CA_1B_1, CBA háromszögek középpontosan hasonlóak, így a hasonlóság C centrumán átmegy az egymásnak megfelelő A_1B_1, BA oldalak I, F felezőpontjának egyenese. A BA szakaszt egy 1-nél kisebb pozitív arányú C centrumú hasonlóság viszi A_1B_1-be, így I a CF *szakasz* belsejében van.

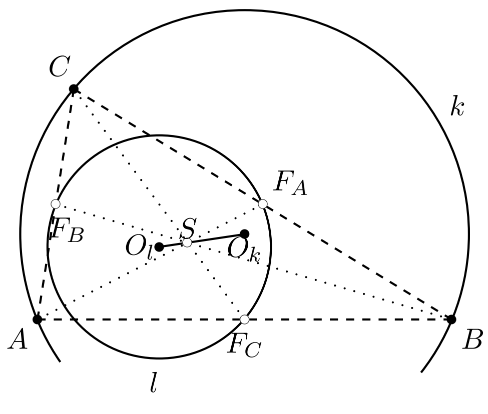
Az FCT, FIJ háromszögek is középppontosan hasonlóak, így a hasonlóság F centrumán átmegy az egymásnak megfelelő CT, IJ oldalak P, Q felezőpontjának egyenese. A CT szakaszt egy 1-nél kisebb pozitív arányú F centrumú hasonlóság viszi IJ-be, így Q a PF *szakasz* belsejében van.

Állítjuk, hogy a keresett mértani hely a (nyílt) PF szakasz. Valóban, ha Q e szakasz tetszőleges belső pontja, akkor Q az FTC derékszögű háromszög belsejében van, a rajta át TC-vel húzott párhuzamos elmetszi az FC szakasz egy I pontban. Az a C centrumú középpontos hasonlóság, amely F-et I-be képezi az AB szakaszt egy B_1A_1 szakaszba képezi, mely párhuzamos AB-vel és végpontjai a CA, CB oldalakra esnek. Ha B_1 illetve A_1 merőleges vetülete az AB egyenesen U illetve V, akkor A_1B_1UV téglalap, mert szögei derékszögek. Ennek a téglalapnak valóban Q a középpontja, mert a szerkesztés miatt Q az A_1B_1 oldal I felezőpontjában A_1B_1-re állított merőlegesen van, a merőleges A_1B_1 és AB közti szakaszának felénél.



8.2M.1. ábra.

8.3. a) Az ABC háromszög oldalainak F_A, F_B, F_C felezőpontjai egy — az ABC-hez hasonló — háromszöget határoznak meg. A hasonlósági arány $1:2$, a hasonlósági középpont a háromszögek közös S súlypontja. Az S-re való $(-1/2)$ arányú kicsinyítés az ABC háromszöget $F_AF_BF_C$-re, k-t l-re, k O_k középpontját az l kör O_l középpontjára képezi le (lásd a **??**. ábrát).



8.3M.1. ábra.

Ebből máris leszögezhetjük, hogy csak akkor szerkeszthető a háromszög, ha l épp fele akkora sugarú, mint k. Ilyenkor viszont — mint azt mindjárt látni fogjuk — a k kör bármely olyan AB húrja, amelynek F_C felezőpontja illeszkedik l-re része egy megfelelő háromszögnek.

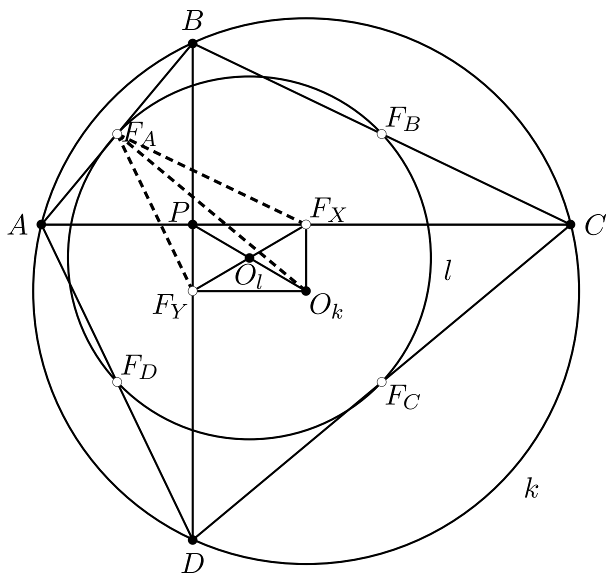
Az l és k körök ismeretében ugyanis megszerkeszthető az S pont, mint az O_lO_k szakasz O_l felőli harmadolópontja. Az S-re való (-2)-szeres nagyítás l-t k-ra képezi. Legyen ennél a nagyításnál F_C képe a C pont. Az S pont szükségképpen az ABC háromszög súlypontja, mint a CF_C súlyvonal harmadolópontja. Ha most K-t $(-1/2)$ arányban kicsinyítjük az S ponton át, akkor az l körhöz, az A, B pontokból az l-re illeszkedő F_A, F_B oldalfelezőpontokhoz jutunk.

b) Először meghatározzuk a szerkeszthetőség feltételét. Ezt az alábbi két nevezetes összefüggésre alapozzuk:

1. Lemma: Bármely négyszög oldalfelezopontjai egy olyan paralelogrammát alkotnak, amelynek oldalai párhuzamosak a négyszög átlóival.

2. Lemma: Bármely paralelogramma négy oldalának négyzetösszege egyenlő a két átlójának négyzetösszegével.

Az 1. lemma alapján megállapíthatjuk, hogy szerkesztendő négyszögünk oldalfelezőpontjai téglalapot alkotnak, hiszen ez az egyetlen olyan paralelogramma, ami húrnégyszög. Azt is láthatjuk, hogy négyszögünk AC és BD átlói egymásra merőlegesek. Ebből az lesz fontos számunkra, hogy $APB\sphericalangle = 90°$, és így Thalesz tételének megfordítása szerint $AF_A = F_AP$ (lásd a **??**. ábrát).



8.3M.2. ábra.

Állítjuk, hogy az O_kP szakasz felezőpontja épp az O_l pont. Ennek igazolásához $F_AF_BF_CF_D$ téglalap mellett vegyük még tekintetbe az $ACDB$ (ábránkon hurkolt) négyszög $F_YF_CF_XF_A$ oldalfelezőpontjai által alkotott paralelogrammát, továbbá az AC, BD merőleges húrok és oldalfelezőmerőlegeseik határolta $O_kF_YPF_X$ téglalapot. E három négyszögről sorban bebizonyítjuk, hogy középpontja mindegyiknek az O_l pont. $Az F_AF_BF_CF_D$ téglalapnak azért, mert középpontja ugyanaz, mint körülírt körének középpontja, az $F_YF_CF_XF_A$ paralelogrammának azért, mert F_CF_A átlója az előző téglalapnak is átlója, végül az $O_kF_YPF_X$ téglalapnak azért, mert F_XF_Y átlója közös az előző paralelogrammával.

Alkalmazzuk most 2. lemmánkat arra a paralelogrammára, amelynek egyik átlója az O_kP szakasz, másik átlójának fele pedig F_AO_l:

$$2 \cdot F_AP^2 + 2 \cdot F_AO_k^2 = O_KP^2 + 4 \cdot O_lF_A^2.$$

Itt $O_lF_A = R$, $O_kP = 2d$, az O_kF_AA derékszögű háromszögben pedig $F_AO_k^2 = r^2 - AF_A^2$, így

$$2 \cdot F_AP^2 + 2 \cdot r^2 - 2 \cdot AF_A^2 = 4 \cdot d^2 + 4 \cdot R^2. \tag{1}$$

Láttuk már, hogy $F_AP = AF_A$, amiből már adódik a szerkeszthetőség szigorú feltétele:

$$2 \cdot (R^2 + d^2) = r^2. \tag{2}$$

Maga a szerkesztés nagyon egyszerű, ha a (2) feltétel teljesül. Állítjuk, hogy ha az a további apró feltétel is teljesül, hogy l nem a k középpontján áthaladó $\frac{r}{2}$ sugarú kör, akkor a k kör tetszőleges olyan AB húrja, amelynek F_A felezopontja illeszkedik az l körre kiegészítheto a feladat feltételeinek megfelelő négyszöggé.

Legyen P pont úgy megválasztva, hogy az O_kP szakasz felezőpontja éppen O_l legyen. A szerkesztés csak abból áll, hogy az adott A és B pontokból meghúzzuk a P ponton át a k kör AC, BD húrjait. Apró feltételünk pontosan ahhoz kell, hogy P ne eshessék a k körre, tehát az egyszerű eljárás végrehajtható legyen, a származtatott A, B, C, D pontok különbözőek legyenek. Alább azt igazoljuk, hogy az így megszerkesztett négyszög oldalfelezőpontjai illeszkednek l -re.

Most az (1), (2) egyenletek eleve teljesülnek, így $F_AP = AF_A$, azaz $APB\sphericalangle = 90°$. Az AP szakasz felezőmerőlegese F_A-n, PC felezőmerőlegese F_B-n, AC felezőmerőlegese O_k-n megy át, így az O_kP szakasz O_l felezőpontja illeszkedik az AC-vel párhuzamos F_AF_C szakasz felezőmerőlegesére. Így F_B illeszkedik l-re, és ez hasonlóan bizonyítható a többi oldalfelezőpontra is.

8.1. Alkalmazzuk azt a C centrumú középpontos hasonlóságot, amely D-t F-be képezi. Ez a leképezés a beírt kör D-beli érintőjét a vele párhuzamos AB egyenesbe viszi, CA-t és CB-t is önmagára képezi, így a háromszög beírt körét a háromszög egyik hozzáírt körébe transzformálja. Az F pont tehát az AB oldalhoz hozzáírt kör érintési pontja. Ismeretes, hogy – a szokásos jelölésekkel – $AE = \frac{b+c-a}{2} = BF$, ami bizonyítja a feladat állítását.

8.1. Legyen T az érintési pont, O_1 és O_2 a két kör középpontja, tehát sugaruk O_1T ill. O_2T. Van egy olyan T centrumú középpontos nagyítás, amely O_1-et O_2-be képezi. Nagyításnál kör képe kör, középpont képe középpont: Mivel ennél a nagyításnál T képe T, így az O_1 középpontú T-n átmenő egyik kör képe az O_2 középpontú T-n átmenő kör, azaz a másik adott kör.

8.2. Legyen a k kör H-beli érintője a h egyenes. Nagyításnál a kör érintőjének képe a képkör érintője, a kör és egyenes érintési pontjának képe a képkör és az egyenes képének érintési pontja. Esetünkben a nagyításnál H képe H, h képe h, így k képének, a k' körnek is érintője H-ban a h egyenes. Ez épp azt jelenti, hogy k és k' érintik egymást H-ban.

8.3.

1. megoldás. Az A_2B szakasz a k_2 kör átmérője, hiszen párhuzamos érintők érintési pontjai mindig egy átmérő végpontjai. Thalesz tétele szerint $BCA_2\angle = 90°$.

A k_1, k_2 körök C pontban állított közös érintője messe e-t az F pontban. F-ből az egyes körökhöz húzott két érintő egyforma hosszú, azaz $FA_1 = FC$ illetve $FA_2 = FC$, tehát az A_1A_2 szakasz Thalesz köre átmegy C-n, $A_2CA_1\angle = 90°$.

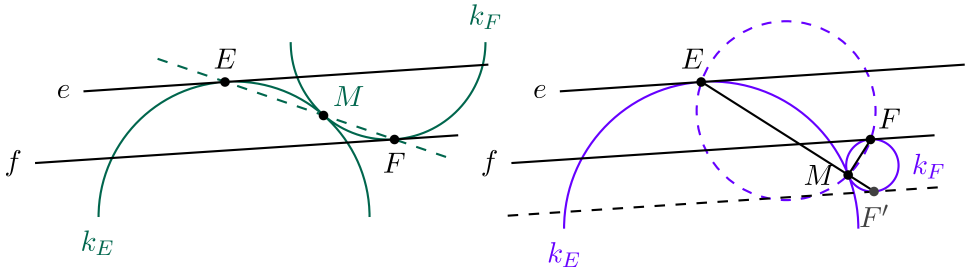
Mindezekből $BCA_2\angle + A_2CA_1\angle = 90° + 90° = 180°$.

2. megoldás. Legyen O_1 ill. O_2 a két középpont. O_1A_1 és O_2A_2 párhuzamosak, hiszen mind a kettő merőleges e-re. Így $A_1O_1C\angle = BO_2C\angle$, mert váltószögek. Az A_1OC, BO_2C háromszögek egyenlő szárúak, száraik szöge egyenlő egymással, így alapon fekvő szögeik is egyenlők: $A_1CO\angle = BCO_2\angle$. Ezek a szögek tehát csúcsszögek, A_1, C és B egy egyenesen vannak.

3. megoldás. C-ből a k_1 kör k_2-be nagyítható (lásd a 8.1. feladatot). Nagyításnál egyenes képe vele párhuzamos (vagy egybeeső egyenes), kör érintőjének képe a képkör érintője, az érintési pont képe a képkör és az érintő képének érintési pontja.

Az e egyenes a k_1 kör érintője, így képe – e' – a k_2 kör e-vel párhuzamos érintője lesz (e' nem egyezik meg e-vel, mert C nem illeszkedik e-re). A k_2 körnek csak egyetlen e-től különböző e-vel párhuzamos érintője van, tehát e' a feladat szövegében szereplő – k_2-t a B pontban érintő – egyenes. A B pont tehát az A_1 pont képe, így A_1, B és C egy egyenesen vannak.

8.4. A k_E, k_F körök M érintési pontjából a k_E kör k_F-be nagyítható (lásd a 8.1. feladatot). Ennél a nagyításnál a k_E kör e érintőjének e' képe a k_F kör e-vel párhuzamos érintője lesz, azaz f, vagy k_F-nek az f-fel párhuzamos f' érintője.

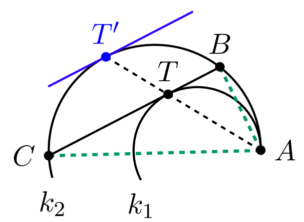


8.4M.1. ábra.

Ha $e' = f$, akkor (lásd az 1. ábra bal oldalát) a nagyításnál E képe F, tehát M az EF egyenesen van. Belátjuk, hogy az EF egyenesen – az E, F pontok kivételével – bárhol lehet M. Ha ugyanis M nincs az e egyenesen, akkor pontosan egy olyan kör van, jelölje e_M, amely E-ben érinti e-t és átmegy M-en (lásd a **??**. feladatot). Ugyanígy egy olyan van, jelölje f_M, amely F-ben érinti f-et és átmegy M-en. Van egy olyan M centrumú középpontos nagyítás, amely E-t F-be képezi, ennél M képe M, e képe a vele párhuzamos f, így az előbb említett egyértelműség miatt e_M képe f_M, azaz (lásd a 8.2. feladatot) e_M és f_M érintik egymást M-ben.

Ha $e' = f'$, (lásd az 1. ábra jobb oldalát) és F' az f' érintési pontja k_F-en, akkor FF' a k_F kör átmérője, így Thalesz tétele szerint $FMF'\angle = 90°$ és ezért $FME\angle = 90°$, tehát M az EF szakasz Thalesz körén van.

8.5. Ha A-ból a k_1 kört a k_2 körbe nagyítjuk, akkor a k_1 kör BC érintője a k_2 kör egy BC-vel párhuzamos e érintőjébe képződik (lásd az 1. ábrát), a T érintési pont T' képe pedig az e és k_2 érintési pontja lesz. A k_2 körben az e érintő párhuzamos a BC húrral, így T' a BC ív felezőpontja. Ezért a k_2 körben a BT', $T'C$ ívek kerületi szöge egyenlő: $BAT'\angle = T'AC\angle$, azaz $BAT\angle = TAC\angle$.



8.5M.1. ábra.

8.6. Mivel a k, l köröket egy P centrumú középpontos hasonlóság viszi egymásba, amelynél az L, K pontok egymás képei, így a KP, LP szakaszok k-beli illetve l-beli látószögei egyenlők:

$$PVK\sphericalangle \equiv PUL\sphericalangle \pmod{180°}. \tag{1}$$

Mivel

$$TVP\sphericalangle + PVK\sphericalangle \equiv 180° \pmod{180°} \tag{2}$$

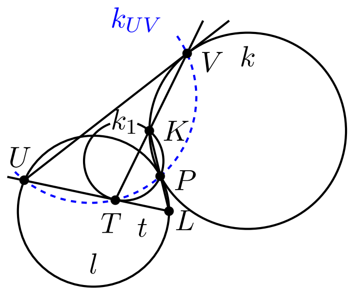
és

$$TUP\sphericalangle + PUL\sphericalangle \equiv 180° \pmod{180°}, \tag{3}$$

így

$$TVP\sphericalangle \equiv TUP\sphericalangle \pmod{180°}, \tag{4}$$

azaz a T, U, P, V pontok egy k_{UV} körön vannak (lásd az 1. ábrát).



8.6M.1. ábra.

A k_1 körben a PT húr kerületi és érintő szárú kerületi szöge egyenlő:

$$PKT\sphericalangle \equiv PTU\sphericalangle \pmod{180^\circ}, \tag{5}$$

és felírhatjuk a k_{UV} kör PU húrhoz tartozó kerületi szögeit is:

$$PTU\sphericalangle \equiv PVU\sphericalangle \pmod{180^\circ}. \tag{6}$$

A k körben a PV húr kerületi szöge:

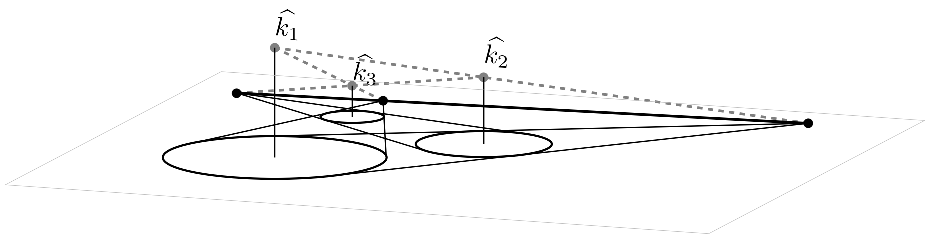
$$PKV\sphericalangle \equiv PKT\sphericalangle \pmod{180^\circ}, \tag{7}$$

így (5) és (6) szerint

$$PKV\sphericalangle \equiv PVU\sphericalangle \pmod{180^\circ}, \tag{8}$$

tehát az utóbbi szög érintő szárú kerületi szöge PV-nek k-ban, azaz UV érinti k-t.

8.2. A feladat megoldásához lépjünk ki a térbe (lásd a 2. ábrát)! Minden egyes kör középpontja fölött, az alapsíkra merőlegesen, attól akkora távolságban, mint a kör sugara vegyünk fel egy pontot. A k_i körhöz ilymódon rendelt pontot jelölje $\widehat{k_i}$.

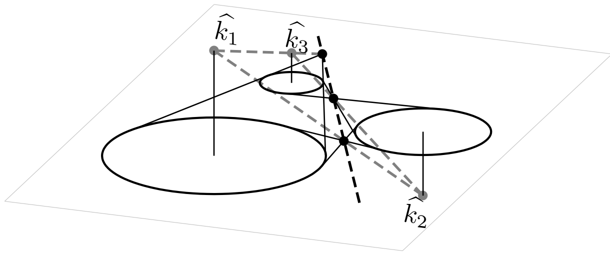


8.2M.2. ábra.

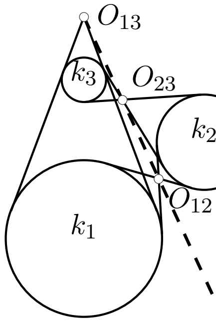
Amikor az O_{12} pontból a k_2 kört a k_1 körbe nagyítjuk, akkor egyúttal átvisszük a $\widehat{k_2}$ pontot a $\widehat{k_1}$ pontba. A $\widehat{k_2}$, $\widehat{k_1}$ pontok egyenese tehát átmegy O_{12}-n és hasonlóan igazolható, hogy O_{23} illeszkedik a $\widehat{k_2}\widehat{k_3}$ egyenesre, O_{13} pedig $\widehat{k_1}\widehat{k_3}$-ra. Az említett három térbeli egyenes egy síkban van, nevezetesen a $\widehat{k_1}\widehat{k_2}\widehat{k_3}$ síkban, tehát O_{12}, O_{23} és O_{13} is benne van ebben a síkban. Ugyanakkor ez a három pont benne van a k_i körök síkjában, tehát a két sík metszésvonalán, azaz egy egyenesen helyezkednek el. Q.E.D.

8.3. Játsszunk el egy kicsit a 8.2M. megoldás ábrájával (lásd a **??**., **??**. ábrákat)! Az egyik, mondjuk a k_2 körhöz úgy rendeljünk térbeli pontot, hogy azt középpontjában az alapsíkra merőlegesen ne *fölfelé*, hanem *lefelé* vegyük fel!

Láthatjuk, hogy a $\widehat{k_2}\widehat{k_3}$, $\widehat{k_1}\widehat{k_2}$ egyenesek így a k_2, k_3 illetve a k_1, k_2 körök közös *belső* hasonlósági pontját metszik ki az alapsíkból, a $\widehat{k_1}\widehat{k_3}$ egyenes pedig továbbra is a külső hasonlósági pontban metszi azt. Q.E.D.



8.3M.1. ábra.



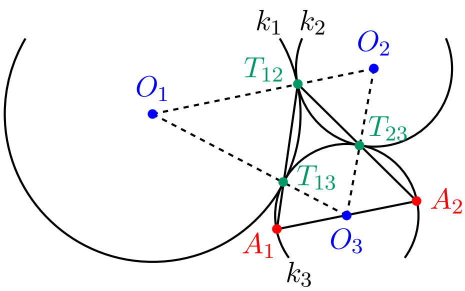
8.3M.2. ábra.

8.1. Jelölje a k_i kör középpontját O_i, a k_i, k_j körök érintési pontját T_{ij} ($i, j \in \{1,2,3\}$), a k_3 körnek a $T_{12}T_{13}$, $T_{12}T_{23}$ egyenesekke való másik metszéspontját A_1 ill. A_2. A T_{13} pont a k_1, k_3 körök egyik hasonlósági középpontja és ennél a hasonlóságnál a T_{12}, A_1 pontok egymásnak felelnek meg, így

$$T_{12}O_1T_{13}\sphericalangle = T_{13}O_3A_1\sphericalangle, \tag{1}$$

és teljesen hasonlóan

$$T_{23}O_2T_{12}\sphericalangle = A_2O_3T_{23}\sphericalangle. \tag{2}$$

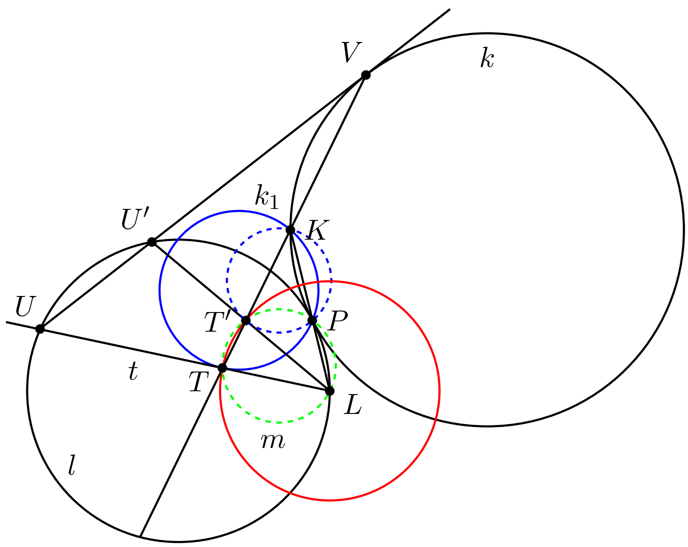


8.1M.1. ábra.

Azt szerenénk belátni, hogy $A_2O_3A_1\sphericalangle = 180°$. A (1), (2) összefüggések alapján (lásd az 1). ábrát):

$$A_2O_3A_1\sphericalangle = A_2O_3T_{23}\sphericalangle + T_{23}O_3T_{13}\sphericalangle + T_{13}O_3A_1\sphericalangle = T_{23}O_2T_{12}\sphericalangle + T_{23}O_3T_{13}\sphericalangle + T_{12}O_1T_{13}\sphericalangle. \tag{3}$$

Érintkező körök érintési pontja és középpontjaik egy egyenesen vannak, így (3) jobb oldalán az $O_2O_3O_1$ háromszög belső szögeinek összege áll, ami bizonyítja az állítást.



8.2M.1. ábra.

8.2. A 8.7. feladat állítása szerint a P, K, T pontokon átmenő kör T-ben érinti t-t, így az L pontnak erre a körre vonatkozó hatványa: $LT^2 = LP \cdot LK$, azaz LT állandó, T egy L középpontú m körön helyezkedik el.

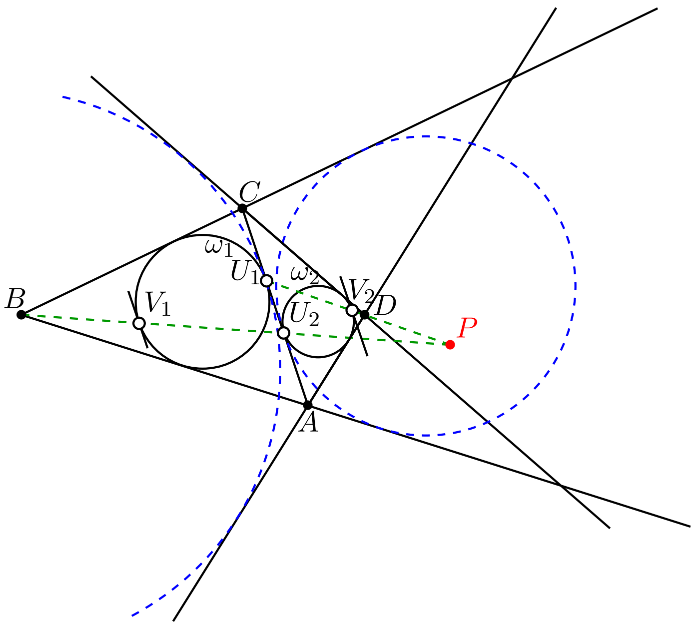
Megmutatható, hogy ennek a körnek minden – a KL egyenesre nem illeszkedő – pontja megfelelő. Valóban, ha T az m kör KL-re nem illeszkedő pontja, akkor van egy olyan K-n és P-n átmenő kör, amelyet az LT egyenes T-ben érint és ennek az egyenesnek az l-el vett L-től különböző metszésponta (ill. maga L, ha l érintőjéről van szó) lesz U, majd V az U-ból k hoz húzott érintő érintési pontja, ahor az UTP háromszög körülírt köre is metszi k-t (lásd a 8.6., 8.7. feladatokat).

8.3. Jelöljük a körök középpontjait a megfelelő nagybetűvel továbbá ω_1 illetve ω_2 érintési pontját AC-vel U_1 illetve U_2, az ezekkel átellenes pontokat a körön V_1 illetve V_2 (lásd az 1. ábrát).

Az érintőszakaszok egyenlőségének többszöri alkalmazásával könnyen megmutatható, hogy az ω_2' kör létezésének szükséges (és elégséges) feltétele a $BC-BA = DA-DC$ összefüggés. Az érintő szakaszok egyenlőségét megint felhasználva az is igazolható, hogy U_2 az ABC háromszög egyik hozzáírt körének érintési pontja, azé, amelyik az AC oldalt érinti kívülről. Ez a kör az ω_1 körből egy B középpontú nagyítással kapható. Ennél a nagyításnál V_1 képe U_2, hiszen a két körnek ezekben a pontokban párhuzamosak az érintői. Ebből következik, hogy B, V_1, U_2 pontok egy e egyenesre illeszkednek, és hasonlóan igazolható, hogy C, U_1 és V_2 is egy f egyenesre illeszkednek. Az e, f egyenesek P metszéspontja az ω_1, ω_2 körök külső hasonlósági pontja, tudniillik a két kör egymásba való nagyításánál egymásnak felel meg a $V_1, U_2 \in e$ pontpár is és az U_1, V_2 pontpár is. P tehát a közös külső érintők metszéspontja is.

B középpontú megfelelő arányú nagyítással az ω_1 kör az ω körbe nagyítható, amelynél az ω_1 kör Ω_1V_1 sugarának képe az ω kör egy ΩQ sugara. D középpontú megfelelő (negatív) arányú nagyítással (kicsinyítéssel) az ω kör az ω_2 körbe nagyítható, amelynél az ω kör ΩQ sugara az ω_2 kör egy sugarába képződik (lásd a 2. ábrát). Ez a sugár párhuzamos Ω_1V_1-vel, de ellenkező állású, tehát nem más, mint az Ω_2V_2 sugár.

Ezek szerint a Q pont a $BV_1 = e$, $CV_2 = f$ egyenesek metszéspontja, azaz ω_1 és ω_2 külső



8.3M.1. ábra.

hasonlósági pontja, a fentebb P-vel jelölt pont. Ezzel az állítást igazoltuk.

9. Egyenlőtlenségek

9.2. Tekintsünk két AB fölötti látókörívet az AB egyenesnek e felőli oldalán. A két látókör közül az egyik a belsejében tartalmazza a másikat, tehát a látószög ez utóbbiban a kisebb (l. az 5.5. feladatot). Minden, az e egyenest metsző vagy érintő látókörív tartalmazza az AB szakasz felezőmerőlegesének és e-nek a metszéspontját, és így az AB-n átmenő és e-t érintő látókörívet is. Az $APB\angle$ szög tehát akkor a legnagyobb, ha P az AB szakasz felezőmerőlegesének e-vel való metszéspontjában van.

Megjegyzés. Nyilvánvaló, hogy ha P „nagyon messze” van az e egyenesen, akkor az APB szög akármilyen kicsivé tehető, tehát nincs olyan helyzet, ahol $APB\angle$ minimális volna.

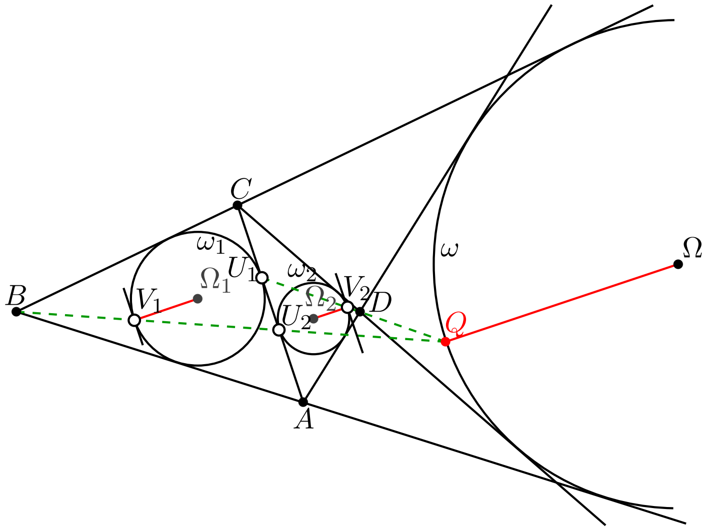
9.1. Legyen az ABC háromszög BC, CA, AB oldalának felezőpontja rendre F_{BC}, F_{CA} és F_{AB}. A háromszögegyenlőtlenség szerint $AF_{BC} < AB + BF_{BC}$, $BF_{AC} < BC + CF_{AC}$ és $CF_{AB} <$ $< CA + AF_{AB}$. E három egyenlőtlenséget összeadva a feladat állítását nyerjük.

9.2. Tükrözzük az ABC háromszög S súlypontját a BC oldal felezőpontjára, a tükörképet jelöljük T-vel. **??**. feladatból tudjuk, hogy az STC háromszög oldalainak hossza rendre az eredeti háromszög súlyvonalai hosszának kétharmada, és a súlyvonalainak hossza rendre egyenlő az eredeti háromszögoldalak hosszának felével.

Ha tehát az STC háromszögre alkalmazzuk a 9.1. feladat állítását, épp a kívánt állítást kapjuk.

9.3.

1. megoldás. Az oldalhosszakra vonatkozó állítás következik abból, hogy a súlyvonalak harmadolják egymást és hogy például az $BSCS_A$, $CSAS_B$, $ASBS_C$ négyszögek átlói felezik egymást, tehát paralelogrammák.



8.3M.2. ábra.

Másrészt mind a hat háromszögben egy-egy súlyvonal közvetlenül azonos az eredeti háromszög oldalának felével, így a második állítás is azonnal adódik.

2. megoldás. Az STC háromszög oldalaira igaz, hogy $\overrightarrow{TS} = \overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{CT} = \overrightarrow{SB}$ (és persze $\overrightarrow{SC}$ egyenlő önmagával). Ez következik egyrészt abból, hogy a súlyvonalak harmadolják egymást, másrészt abból, hogy a $BSCT$ négyszög középpontosan tükrös a BC oldal felezőpontjára, tehát paralelogramma.

Másrészt az is következik mindebből, hogy az STC háromszög súlyvonalai mint vektorok is egyenlők az eredeti háromszög oldalvektorainak felével. Például $\overrightarrow{F_{TC}S} = \overrightarrow{TS} + \overrightarrow{F_{TC}T} = \overrightarrow{TS} + \overrightarrow{CT}/2 = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB}/2 = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{F_{AC}S}/2 = \overrightarrow{F_{AC}A} = \overrightarrow{AC}/2$. Szimmetria okokból ugyanez igaz az az STC háromszög másik két súlyvonalára is.

9.4. $AF_{BC} < AF_{AB} + F_{AB}F_{BC} = (c+b)/2$, $BF_{AC} < BF_{BC} + F_{BC}F_{AC} = (a+c)/2$ és $CF_{AB} < CF_{CA} + F_{CA}F_{AB} = (b+a)/2$. E három egyenlőtlenséget összeadva a feladat első állítását nyerjük.

A feladat második állítását pontosan ugyanúgy kapjuk az elsőből, ahogyan a 9.1. feladatból kaptuk 9.2. feladat állítását.

9.5. Tekintsünk egy olyan egyenlőszárú háromszöget, amelynek két szára egységnyi hosszú, az alapja pedig ε, kis pozitív szám. E háromszög kerülete $2+\varepsilon$, az alaphoz tartozó súlyvonala a háromszögegyenlőtlenség szerint nagyobb $2-\varepsilon/2$-nél, a másik két súlyvonala pedig nagyobb $1/2-\varepsilon$-nál. A három súlyvonal hosszának összege tehát nagyobb $2-3\varepsilon$-nál.

Ha ε-t elég kicsinek választjuk, akkor a $(2-3\varepsilon)/(2+\varepsilon) = 1-4\varepsilon/(2+\varepsilon > 1-2\varepsilon$ tetszőlegese közel lehet egyhez. Tehát nincs egynél kisebb c, amelyre a feladatban megfogalmazott állítás igaz volna.

9.1. Vonjunk le mindkét oldalból $a^4+b^4+c^4$-et. Ismeretes, hogy ekkor a bal oldalon $(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$ áll. Itt az első tényező biztosan pozitív. A három másik tényező összege $a+b+c$ pozitív, tehát mindhárom nem lehet egyszerre negatív. Kettő közülük szintén nem lehet negatív, hiszen például a második és harmadik tényező összege, $2a$ pozitív. Tehát két eset van: vagy minden tényező pozitív, ekkor mindhárom oldalra teljesül a háromszögegyenlőtlenség, és teljesül a feladat egyenlőtlensége, vagy pontosan egy tényező negatív, s ekkor valamelyik oldalra nem teljesülne a háromszögegyenlőtlenség és nem teljesül a feladat egyenlőtlensége sem.

9.2. A 9.1. feladatnál láttuk, hogy az első egyenlőtlenség pozitív a, b, c számokra pontosan akkor teljesül, ha mindháromra teljesül a háromszögegyenlőtlenség és azt kell belátnunk, hogy akkor a négyzetgyökeikre is teljesül a háromszögegyenlőtlenség. Ez viszont négyzetre emeléssel azonnal látszik.

9.3.

1. megoldás. Írjuk az egyenlőtlenséget $(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) \le abc$ alakban.

Az $(a+b-c)(a-b+c) = a^2-(b-c)^2$ szorzat egyrészt pozitív (hiszen a háromszögegyenlőtlenség szerint két pozitív tényező szorzata), másrészt értéke legfeljebb a^2 és egyenlőség csak $b=c$ esetén áll fenn. Ugyanígy $(b+c-a)(b-c+a) \le b^2$ és $(c+a-b)(c-a+b) \le c^2$. E három egyenlőtlenséget összeszorozva a kívánt egyenlőtlenség négyzetét kapjuk. Mivel az eredeti egyenlőtlenségben mindkét oldal pozitív volt, így azt is bebizonyítottuk.

Egyenlőség csak $a=b=c$ esetén, tehát csak szabályos háromszögre van.

2. megoldás. Vezessük be a következő jelöléseket: $x=s-a$, $y=s-b$, $z=s-c$. Ismeretes, hogy ekkor $c=x+y$, $b=x+z$ és $a=y+z$. Tehát a feladatban szereplő egyenlőtlenséget így írhatjuk:

$8xyz \le (x+y)(x+z)(y+z)$.

Végezzük el a jobb oldalon a beszorzást és vonjunk le mindkét oldalból $8xyz$-t. Ekkor a következő egyenlőtlenséghez jutunk:

$0 \le x^2y+y^2x+x^2z+z^2x+y^2z+z^2y-6xyz$.

Itt a jobb oldal $x(y-z)^2+y(z-x)^2+z(x-y)^2$ alakba írható. Mivel x, y, z pozitívak, ezért ez a kifejezés soha nem negatív és nulla is csak akkor lesz, ha $x=y=z$, vagyis ha a háromszög szabályos.

3. megoldás. Alkalmazzuk a mértani és számtani közép közötti összefüggést $s-a$-ra és $s-b$-re (megtehetjük, mert mindkettő pozitív):

$\sqrt{(s-a)(s-b)} \le (s-a+s-b)/2 = c/2$.

Ugyanígy kapjuk, hogy $\sqrt{(s-b)(s-c) \le a/2}$ és $\sqrt{(s-c)(s-a) \le b/2}$.

A három egyenlőtlenséget összeszorozva és mindkét oldalát nyolccal szorozva épp a feladat egyenlőtlenségét kapjuk.

Megjegyzés. Ez a megoldás is elmondható az előző (9.3M2.) megoldás jelöléseivel ($x=s-a$, $y=s-b$, $z=s-c$): a három mértani-számtani közép közötti egyenlőtlenség, tehát a $\sqrt{xy} \le$ $\le (x+y)/2$, $\sqrt{xz} \le (x+z)/2$ és $\sqrt{yz} \le (y+z)/2$ egyenlőtlenségek összeszorzásából kapjuk a kívánt $8xyz \le (x+y)(x+z)(y+z)$ egyenlőtlenséget.

4. megoldás. A Héron-képlet szerint az egyenlőtlenség bal oldalán $8T^2/s$ áll (T a háromszög területét jelöli). A jobb oldalon alkalmazzuk az $abc = 4RT$ összefüggést, ahol R a köréírt kör sugarát jelöli.

A feladat állítása tehát azt mondja ki, hogy $2T/s \le R$. Az ismert $T = rs$ területképletet alkalmazva (r a beírt kör sugara) éppen a sugáregyenlőtlenséghez jutunk (l. a 9.4. feladatot).

Egyenlőség a szabályos háromszög esetén áll fenn.

9.4. Írjuk fel a területet a Héron-képlet segítségével: $T = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$. Ha négytényezős szorzatra alkalmazzuk a mértani és számtani közép közötti egyenlőtlenséget, akkor azt kapjuk, hogy $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \le s^2/4$. Itt felhasználtuk, hogy s, $s-a$, $s-b$ és $s-c$ számtani közepe $(s+s-a+s-b+s-c)/4 = s/2$.

A kapott egyenlőtlenség sajnos gyengébb a feladat állításánál. De ha meggondoljuk, ez nem is meglepő, hiszen a mértani-számtani közép közötti egyenlőtlenségben csak akkor van egyenlőség, ha minden tényező egyenlő, s ez itt soha nem áll fenn. Mert $s-a=s-b=s-c$ fennállhat (szabályos háromszögben fenn is áll), de s soha nem lehet egyenlő a másik három tényezővel.

Ez azonban már jelzi is, hogy hogyan érdemes alkalmazni a mértani-számtani közép közötti összefüggést: s-ről „megfeledkezünk” egyelőre:

$(s-a)(s-b)(s-c) \le s^3/27$.

Itt használtuk, hogy a bal oldali három tényező számtani közepe $(s-a+s-b+s-c)/3 = s/3$. Ha enek az egyenlőtlenségnek mindkét oldalát megszorozzuk s-sel és mindkét oldalából négyzetgyököt vonunk (tehetjük, mert mindkét oldal pozitív), akkor épp a feladat állítását kapjuk.

Egyenlőség $s-a=s-b=s-c$ esetén, tehát szabályos háromszögben áll fenn.

9.5. A 9.4. feladat egyenlőtlenségét használva azt kapjuk, hogy $\sqrt{T} \le s/\sqrt[4]{27}$. Mivel T adott, a bal oldal rögzített. A jobb oldal egyenlőség esetén a legkisebb, s ez a szabályos háromszögben áll fenn.

9.1. Legyen K a köréírt kör középpontja, F_{BC} a BC oldal felezőpontja. A feladat állítása azt mondja, hogy az AKF_{BC} háromszögben AF_{BC}-re teljesül a háromszögegyenlőtlenség.

Egyenlőség akkor van, ha F_{BC} az AK egyenesen van. Ez két esetben áll fenn:

– ha a három pont különböző, és egy egyenesbe esik, ez azt jelenti, hogy a háromszög egyenlőszárú: $AB = AC$;

– ha F_{BC} egybeesik K-val, ami azt jelenti, hogy A-nál derékszög van.

(A három pont közül másik kettő nem eshet egybe.)

9.2. A feladat második állítása nyilvánvaló következménye az első állításnak. Elég tehát az első állítást igazolni.

Legyen O_B és O_C a b-hez és c-hez írt kör középpontja. A kettőt összekötő egyenes az A-ban húzott külső szögfelező. Ennek a köréírt körrel való második metszéspontja (ha nem esik egybe A-val) legyen G a belső szögfelezőnek a köréírt körrel való A-tól különböző metszéspontja legyen D. A DG szakasz átmérő a köréírt körben. Másrészt $GF_{BC} = R + d_1$, ahol R a köréírt kör sugara, d_1 a köréírt kör közepének távolsága a BC oldaltól. A 9.1. feladat szerint ez legalább akkora, mint az A-ból induló súlyvonal. A 17.27. feladat szerint a GF_{BC} szakasz hossza éppen a b és c oldalhoz írt kör sugarának átlaga. Ezzel az első állítás bizonyítását is befejeztük.

Az első részben akkor van egyenlőség, ha a súlyvonal éppen $R+d_1$ hosszúságú, ami 9.1. feladat szerint két esetben teljesül: ha $AB = AC$ vagy ha A-nál derékszög van. A második részben akkor van egyenlőség, ha a háromszög szabályos.

Megjegyzés. Érdemes meggondolni, hol használtuk, hogy A-nál nem tompaszög van. Ha A-nál tompaszög van, akkor $GF_{BC} = R + d_1$ úgy igaz, ha d_1 az előjeles távolságot jelöli, azaz negatív, ha K a BC oldalnak a háromszöggel ellentétes oldalán van. A 9.1. feladat állítása viszont tompaszög esetén épp fordítva igaz, ha a d_1 távolságot előjelesen értjük.

9.3. A 9.1. feladatban láttuk, hogy a súlyvonalak hosszának összege legfeljebb $3R+d_1+d_2+d_3$, ahol d_1, d_2, d_3 a köréírt kör középpontjának távolsága a három oldaltól. Ismeretes (l. a 17.30. feladatot), hogy e három távolság összege épp $R + r$.

Megjegyzések. 1. Alkalmazható közvetlenül a 17.29. feladat is.

2. Érdemes meggondolni, miért nem jó ez a bizonyítás tompaszögű háromszögben. Egyrészt használtuk a 17.30. feladatot, ami *előjeles* távolságokra igaz. Másrészt használtuk a 9.1. feladatot, ami tompaszög esetén előjeles távolságokra nem igaz.

9.4.

1. megoldás. Tekintsük a háromszög Feuerbach-körét és húzzunk hozzá mindhárom oldallal párhuzamos érintőt úgy, hogy az egész háromszög az érintő egyik oldalán legyen. Így egy, az eredetihez hasonló háromszöget kapunk, amelynek beírt köre az eredeti háromszög Feuerbach-köre. Az új háromszög teljesen tartalmazza az eredetit és csak akkor esik egybe vele, ha a Feuerbach-kör sehol „nem lóg ki" az eredeti háromszögből, vagyis mindhárom oldal felezőpontja azonos a szemközti csúcsból induló magasság talppontjával, vagyis mindhárom oldalfelező merőleges egyben magasság is. Ez pedig csak a szabályos háromszögnél teljesül. Azt kaptuk, hogy a beírt kör sugara a szabályos háromszög esetén egyenlő a Feuerbach-kör sugarával, minden más esetben kisebb annál.

Ismeretes, hogy a Feuerbach-kör sugara fele a köréírt kör sugarának (l. a **??** feladatot) tehát azt kaptuk, hogy a beírt kör sugara a szabályos háromszög esetén egyenlő a köréírt kör sugarának felével, minden más esetben kisebb annál.

2. megoldás. A feladat állítása következik abból az ismert összefüggésből, hogy a beírt kör középpontjának és a köréírt kör középpontjának d távolságára igaz a $d^2 = R^2 - 2Rr$, ahol R a köréírt kör sugara, r a beírt köré (lásd a 11.1. feladatot).

9.1. Legyen a P pont vetülete az AB egyenesen T, T távolsága az AB szakasz F felezőpontjától x, az e egyenes távolsága AB-tól d. Nyilván $d = PT$. Az egységet választhatjuk úgy, hogy AB szakasz hossza épp két egység legyen. Ekkor az $AP^2 + BP^2 = (1-x)^2 + (1+x)^2 + 2d^2 = 2x^2 + + 2 + 2d^2$. Itt csak az első tag függ P helyzetétől, s ez akkor minimális, ha $x = 0$, vagyis ha T az AB szakasz felezőpontja. A következőt kaptuk:

Ha P egy szakasszal párhuzamos egyenesen fut, akkor e szakasz két végpontjától vett távolságának négyzetösszege akkor lesz minimális, ha P a szakaszfelező merőlegesen van.

Megjegyzés

Maximum nyilvánvalóan nincsen.

9.2. Vetítsük merőlegesen az e egyenesre az A és B pontot, vetületüket jelölje A' illetve B'. Az $A'B'$ szakasz felezőpontját jelöljük F-fel, válasszuk az $A'F$ szakasz hosszát egységnek, jelölje továbbá FP szakasz előjeles hosszát x, akkor pozitív, ha P az FB' félegyenesen van.

Ezekkel a jelölésekkel a Pitagorász-tétel szerint

$AP^2 + BP^2 = AA'^2 + (1+x)^2 + BB'^2 + (1-x)^2 = AA^2 + BB'^2 + 2 + 2x^2$.

Itt csak az $2x^2$-es tag függ P helyzetétől és nyilván akkor minimális, ha $x = 0$, azaz ha a P pont az $A'B'$ szakasz felezőpontja.

Nyilvánvaló, hogy a négyzetösszegnek nincsen maximuma, hiszen ha a P pont „nagyon távol" van az e egyenesen, akkor a négyzetösszeg is tetszőlegesen nagy lehet.

9.3.

1. megoldás. A 9.1. feladat megoldásához hasonlóan most is nekiláthatunk a megoldásnak számolással:

Legyen a P pont vetülete az AB egyenesen T, T távolsága az AB szakasz F felezőpontjától x, az e egyenes távolsága AB-tól d. Nyilván $d = PT$. Az egységet választhatjuk úgy, hogy AB szakasz hossza épp két egység legyen. A szorzat ugyanakkor lesz minimális, mint a négyzete. Ez utóbbit felírhatjuk x függvényében:

$AP^2 \cdot BP^2 = [(1-x)^2 + d^2][(1+x)^2 + d^2] = (1-x^2)^2 + 2d^2x^2 + 2d^2 + d^4 = x^4 + 2(d^2-1)x^2 + + 2 + 2d^2 + d^4$.

Itt $2 + 2d^2 + d^4$ nem függ P helyzetétől. Ha $d \geq 1$, akkor $x = 0$-ra a $x^4 + 2(d^2-1)x^2$ kifejezés értéke nulla, különben pozitív, tehát a keresett minimum $x = 0$-nál van, vagyis akkor, ha P az AB szakasz felezőmerőlegesén van.

Ha viszont $d < 1$, akkor a $x^4 + 2(d^2 - 1)x^2$ kifejezés értéke az $x^2 = 1 - d^2$ helyen, azaz az $x = \pm\sqrt{1-d^2}$ helyeken minimális.

A számolásos megoldás tehát eredményre vezetett, ám a második esetben nem látszik közvetlenül, hogy mi a kapott megoldás geometriai jelentése. Annyi világos, hogy ha az e egyenes az AB szakasztól legalább $AB/2$ távolságra van, akkor a minimális szorzatot a szakasz felezőmerőlegesén kapjuk, ha viszont e $AB/2$-nél közelebb van, akkor két, erre a felezőmerőlegesre szimmetrikus megoldást kapunk. Az is könnyen látszik, hogy a $d = AB/2$ határesetben a felezőmerőlegesen levő P pontból az AB szakasz épp derékszög alatt látszik, mert P rajta van AB Thálész-körén.

A következő (9.3M2.) megoldásból rögtön világos lesz a kapott eredmény geometriai jelentése.

2. megoldás. Nyilvánvaló, hogy az APB háromszög területe független P helyzetétől.

Legyen B pont merőleges vetülete az AP egyenesen B'. Az $AB \cdot BB'$ szorzat tehát független P helyzetétől. Az $AP \cdot BP$ szorzat tehát akkor lesz minimális, ha BP/BB' a lehető legnagyobb. Két eset van:

Ha a P pontnak van olyan helyzete, amikor AP és BP merőleges egymásra, akkor itt lesz a szorzat minimális, mert minden más helyzetben ez az arány kisebb egynél. Tehát ha az AB átmérőjű Thálész-kör elmetszi (vagy érinti) az e egyenest, akkor a két metszéspontban (vagy az egyetlen érintési pontban) lesz az $AP \cdot BP$ szorzat minimális.

Ha P-nek nincs ilyen helyzete, tehát az AB fölötti Thálész-körnek nincs e-vel közös pontja, akkor az $APB\angle$ szög mindig hegyesszög. A BO/BB' arány tehát annál nagyobb, minél nagyobb az $APB\angle$ szög. 9.2. feladatból tudjuk, hogy ez a szög akkor a legnagyobb, ha P az AB szakaszfelező merőlegesen van.

Azt kaptuk, hogy

– ha az AB átmérőjű (Thálész-)körnek van e-vel közös pontja, akkor ezekben a közös pontokban (vagy érintés esetén ebben a közös pontban) lesz az $AP \cdot BP$ szorzat minimális;

– ha az AB átmérőjű körnek nincs e-vel közös pontja, akkor az AB szakasz felezőmerőlegesének és e-nek a metszéspontjában lesz a szorzat minimális.

Ez utóbbi eset pontosan akkor áll fenn, ha az e egyenes távolsága az AB egyenestől nagyobb $AB/2$-nél.

9.4. Ha a háromszög derékszögű, akkor a Pitagorasz-tételből és a Thálész-tételből azonnal következik az állítás.

Ha a háromszög tompaszögű és úgy betűzzük az oldalakat, hogy c-vel szemben van a tompaszög, akkor a 9.1. feladat szerint $a^2 + b^2 < c^2$, tehát a három oldal négyzetösszege kisebb $2c^2$-nél, másrészt c hossza kisebb az átmérőnél, tehát a három oldal négyzetösszege valóban kisebb $8R^2$-nél.

9.5. Ismeretes, hogy az ABC háromszög köréírt körének K középpontjából az M magasságpontba mutató KM vektor egyenlő $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC}$-vel. Itt mindhárom vektornak R a hossza, tehát $KM^2 = 3R^2 + 2(\overrightarrow{KA}\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KB}\overrightarrow{KC} + \overrightarrow{KC}\overrightarrow{KA})$. Azt kapjuk, hogy

$2(\overrightarrow{KA}\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KB}\overrightarrow{KC} + \overrightarrow{KC}\overrightarrow{KA}) = 3R^2 - KM^2.$

Másrészt például $a^2 = (\overrightarrow{KB} - \overrightarrow{KC})^2 = 2R^2 - 2\overrightarrow{KB}\overrightarrow{KC}$. Az oldalak négyzetösszege tehát egyenlő $6R^2 - 2(\overrightarrow{KA}\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KB}\overrightarrow{KC} + \overrightarrow{KC}\overrightarrow{KA}) = 9R^2 - KM^2$-tel.

Mivel KM^2 nem negatív, a feladat állítását bebizonyítottuk. Egyenlőség akkor és csakis akkor áll fenn, ha $K = M$, azaz ha a háromszög szabályos.

9.1. Tegyük fel, hogy a Q pont nincs a háromszög kerületén és legyen a PQ félegyenes metszéspontja az ABC háromszög kerületével Q'. A háromszögegyenlőtlenség szerint $QQ' + Q'R >$ $> QR$, ezért a $PQ'R$ háromszög kerülete is nagyobb a PQR háromszög kerületénél. Ezt az eljárást folytatva azt kapjuk, hogy a PQR háromszög kerületét növelni tudjuk, amíg minden csúcsa a háromszög kerületére nem kerül. Ha viszont a három csúcs a kerületen van, akkor ismét a háromszögegyenlőtlenségből következik, hogy PQR kerülete akkor a legnagyobb, ha a három csúcsa az ABC háromszög csúcsával egyezik meg.

9.2. Ha L nem konvex, akkor vegyük L konvex burkát. Ennek kerülete kisebb. A továbbiakban ezt tekintjük L-nek, és azt látjuk be, hogy K kerülete nem nagyobb ennek a területénél.

Legyen P és R a K sokszög két szomszédos csúcsa. Mivel K konvex, ezért a PR egyenes K támaszegyenese, azaz az egész K sokszög az egyik oldalán fekszik. Képzeljük úgy, hogy a PR egyenes vízszintes és a K sokszög fölötte van. Messe PR az L (konvex) sokszög kerületét a P' és R' pontokban. Ha P' és R' az L sokszög két szomszédos csúcsa, akkor nem csinálunk semmit. Ellenkező esetben az L sokszögnek van egy darabja, ami a PR egyenes alatt van. Helyettesítsük a $P'R'$ szakasszal az L konvex sokszög kerületének ezt a darabját. Nyilvánvaló, hogy L kerületét ezzel csökkentettük.

Ezzel a K és az L sokszög egy oldalegyenesét azonossá tettük úgy, hogy közben L kerülete csökkent – kivéve, ha a két oldalegyenes már eleve azonos volt. Az eljárást addig folytatjuk, amíg K és L oldalegyenesei azonosak lesznek. Eközben K változatlan maradt, L kerülete pedig legalább egyszer csökkent, ha K és L nem voltak eleve azonosak.

Megjegyzés. Érdemes meggondolni, hogy miért nem alkalmazható az általános esetben 9.1. feladat megoldásának eljárása.

9.1. Legyenek az oldalak ellenkező negyedelőpontjai C_2, A_2, B_2. Írjuk fel a háromszögegyenlőtlenséget az $C_1C_2A_1$ háromszögre ($C_1C_2+C_2A_1 > C_1A_1$) és társaira, illetve a C_1BA_1 háromszögre ($C_1B < BA_1 + C_1A_1$) és társaira.

Megjegyzés: az alsó becslés $\frac{7}{12}K$-ra javítható a $\frac{7}{4}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{C_1A_1} + 2\overrightarrow{C_1B_1}$ összefüggés és társainak alkalmazásával, háromszögegyenlőtlenséggé alakításával.

9.2. Eredmény: a) a középháromszög belseje.

9.4. (1) így írható:

$$\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

Innen a) azonnal adódik, b)-hez használjuk az $|a-b| < c$, $|b-c| < a$, $|c-a| < b$, háromszög egyenlőtlenségeket, majd páronként a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget (párok: pl. $\sqrt{a}$ és $\sqrt{b}$).

9.7. A 9.6. feladat szerint a c oldalhoz tartozó súlyvonal hossza legfeljebb fele c-nek.

A másik két súlyvonalat az oldalakkal kifejezve, majd az összegüket a számtani és négyzetes közép közötti egyenlőtlenséggel felülről becsülve azt kapjuk, hogy $s_a+s_b \leq \sqrt{(4c^2+a^2+b^2)/2} \leq$ $\leq \sqrt{2{,}5}c$. Azt kapjuk, hogy ha egy háromszögben a c oldallal szemben nem hegyesszög van, akkor a súlyvonalak összege legfeljebb $(0{,}5+\sqrt{2{,}5})c$.

Egyenlőség akkor van, ha c-vel szemben derékszög van és a háromszög egyenlőszárú.

10. Az Apollóniusz probléma I.

10.5.

1. megoldás. Jelölje az FF' szakasz felezőmerőlegesét f.

Ha f párhuzamos d-vel, akkor a keresett kör sugara f és d távolsága, innen a szerkesztés egyszerű.

Egyébként legyen $G = f \cap d$ és tekintsünk egy tetszőleges k kört, amelynek K középpontja f-en van és érinti d-t. A k kört G-ből nagyíthatjuk a keresett körbe. Legyenek a GF egyenes és k metszéspontjai P_1, P_2, és messe a KP_1 egyenessel, ill. KP_2-vel párhuzamos F-en áthaladó egyenes f-et az O_1, ill. az O_2 pontban. Ezek a keresett középpontok.

2. megoldás. Jelölje az FF' szakasz felezőmerőlegesét f, a keresett kör(ök) középpontját f-en O, f és d metszéspontját G, az O pontból d-re állított merőleges talppontját O_T. Az OGO_T háromszög G-nélfekvő belső szöge adott, így ismert az $OO_T/OG = OF/OG$ arány is. Az O pontot tehát f-ből kimetszi az (F, G) pontpárhoz tartozó adott arányú Apollóniusz-kör.

3. megoldás. Ha az FF' egyenes párhuzamos d-vel, akkor a keresett kör az FF' szakasz felezőmerőlegesének d-vel való metszéspontján is átmegy, így könnyen szerkeszthető.

Jelölje az FF' egyenes és d metszéspontját P, a keresett l kör és d érintési pontját T. A P pontnak az l körre vonatkozó hatványa kétféleképpen is kifejezhető: $PF \cdot PF' = PT^2$. Innen PT-vel egyenlő hosszúságú szakasz könnyen szerkeszthető (lásd alább) és a PT távolság P-ből d-re (mindkét irányban!) felmérhető, az F, F', T pontokon áthaladó kör a kívánt tulajdonságú lesz.

$\sqrt{PF \cdot PF'}$ hosszúságú szakasz szerkeszthető a magasságtétel felhasználásával is, de a P pontból egy *tetszőleges* F-en és F'-n is áthaladó körhöz húzott érintő hossza is épp ennyi.

11. Kör és pont

11.2. Tükrözzük az AXY háromszöget az A-ból induló szögfelezőre. A kapott $AX'Y'$ háromszögben X' az AC oldalegyenesen van, Y' az AB oldalegyenesen van. Tehát az $AX'Y'$ háromszög pontosan akkor hasonló – a csúcsok ilyen sorrendjében – az ABC háromszöghöz, ha $X'Y'$ párhuzamos XY-nal. Másrészt $X'Y'$ pontosan akkor párhuzamos BC-vel, ha XY antiparalel BC-vel.

11.3. A 11.2. feladat szerint XY pontosan akkor antiparalel a BC oldallal, ha AXY háromszög hasonló az ACB háromszöghöz (a csúcsok ilyen sorrendjében). Ez pedig pontosan azt jelenti, hogy az $AXY\angle = ACB\angle$. Azt kaptuk, hogy XY pontosan akkor antiparalel a BC oldalhoz, ha az $AXY\angle$ irányított szög egyenlő az $BCA\angle$ irányított szöggel. Megjegyezzük, hogy ez az állítás *irányított szögekkel* okoskodva az antiparalel a 11.1.-ben említett mind a négy helyzetében igaz.

Ha például az XY szakasz a háromszög belsejében van, akkor a két szög egyenlősége azt jelenit, hogy az X-nél levő külső szög megegyezik a C-nél levő belső szöggel, tehát a $BXYC$ négyszög húrnégyszög. Ha az XY szakasz a BC-nek A-val ellentétes oldalán van, akkor ugyanez az X-nél levő belső szög és a C-nél levő külső szög egyenlőségét jelenti. A maradó két esetben pedig azt kapjuk, hogy C és X a BY fölötti azonos látóköríven vannak.

11.4. Legyen a B-ből induló magasság talppontja S, a C-ből induló magasságé T. Mindkét talppont rajta van a BC fölötti Thálész-körön, tehát B, S, C, T egy körön vannak. Ebből a 11.3. feladat szerint következik, hogy ST antiparalel BC-vel.

11.5. Tükrözzük az XY szakaszt az A-ból induló szögfelezőre! Pontosan abban az esetben kapunk BC-vel párhuzamost, ha az XY szakasz antiparalel BC-vel. Másrészt a KA sugáregyenesnek az A-ból induló szögfelezőre való tükörképe az A-ból induló magasságegyenes (l. a **??**. feladatot) Az XY és a KA egyenes pontosan akkor merőleges egymásra, ha tükörképeik is merőlegesek egymásra, vagyis ha XY antiparalel BC-vel.

11.7. Legyen R, S és T rendre az A-ból, B-ből és C-ből induló magasság talppontja és K a köréírt kör középpontja. Az $ATKS$, $BTKR$ és $CRKS$ négyszögek egyrétűen lefedik az ABC hegyesszögű háromszöget. Másrészt például az $ATKS$ (húr)négyszög AK átlója merőleges TS-re, hiszen utóbbi antiparalel BC oldallal (l. a 11.5. és a 11.4. feladatot). Tehát az $ATKS$ négyszög területének kétszerese egyenlő az átlók szorzatával, azaz $ST \cdot KA$. Itt $KA = R$, ahol R a köréírt kör sugarának hossza.

Ugyanezt az okoskodást a másik két négyszögre is elismételve azt kapjuk, hogy az ABC háromszög területének kétszerese egyenlő $(ST+TR+RS) \cdot R$-rel, és itt a zárójelben a talpponti háromszög kerülete áll.

A megoldáshoz felhasználtuk, hogy ha egy négyszög két átlója merőleges egymásra, akkor a négyszög területének kétszerese egyenlő az átlók szorzatára, és ez akkor is igaz, ha konkáv négyszögről van szó.

11.9. Az XYZ háromszög X-ből induló belső szögfelezője egyrészt átmegy A-n, az YZ oldalhoz írt kör középpontján, másrészt merőleges a CB oldalra, hiszen ez utóbbi az X-en átmenő külső szögfelező. Tehát AX az ABC háromszög A-ból induló magassága.

A feladatban szereplő XYZ tehát az ABC háromszög talpponti háromszöge. A 11.4. feladat szerint e háromszög oldalai antiparalelek a megfelelő oldallal – például az XY szakasz az AB oldallal – és ezt kellett bizonyítani.

11.10. A hozzáírt körök középppontjaiból alkotott Δ háromszög magasságai éppen az eredeti háromszög belső szögfelezői, talpponti háromszöge tehát az eredeti háromszög. A 11.8. feladat szerint tehát Δ területét úgy kapjuk, hogy összeszorozzuk az ABC háromszög kerületét és a Δ háromszög Feuerbach körének sugarát. Csakhogy ez a Feuerbach kör átmegy a magasságok talppontján, vagyis azonos az ABC háromszög köré írt körrel.

11.11. A BC oldallal antiparalel szakaszok felezőpontjait tükrözve az A-ból induló szögfelezőre a BC oldallal párhuzamos szakaszokat kapunk (amelyek két végpontja az A-ból induló két oldalon van). Ezek felezőpontjai – a középpontos hasonlóság alaptulajdonságai szerint – egy A-ra illeszkedő egyenest alkotnak (az A pont kivételével). Ezen az egyenesen rajta van a BC oldal felezőpontja, vagyis e párhuzamos szakaszok felezőpontjai épp a súlyvonal egyenesét adják (az A pont kivételével). Az antiparalelek felezőpontjai tehát a súlyvonalnak a szögfelezőre vett tükörképét adják, szintén az A pont kivételével.

Az A-n ból induló szimedián tehát az A-ra illeszkedő súlyvonal tükörképe a szögfelezőre.

11.12. Valamely csúcshoz tartozó sugáregyenes az ugyanebből a csúcsra illeszkedő magasságvonalaknak a szögfelezőre vett tükörképe. Általában is igaz a következő:

Legyen P az ABC háromszög belső pontja. Tükrözzük a P pontot a három oldalra. Az így kapott három pont mint csúcs által meghatározott háromszög köréírt körének középpontja legyen P'. Ekkor AP és AP' tükrös az A-ból induló szögfelezőre és ugyanez igaz a másik két csúcsra is.

Tükrözzük ugyanis a P pontot egyrészt az AB, másrészt az AC oldal egyenesére, a kapott két tükörkép legyen P_3 és P_2. A tengelyes tükrözés tulajdonságaiból azonnal következik, hogy $AP_3 = AP = AP_2$, tehát a P_3P_2 szakasz felezőmerőlegese, e_1 átmegy az A csúcson és felezi a $P_2AP_3\angle$ szöget. Továbbá következik az is, hogy $P_2AP_3\angle = 2CAB\angle$.

Legyen e_1 egy, az ABC háromszög belsejébe eső pontja E. Ekkor $P_3AE\angle = BAC\angle = EAP_2\angle$, amiből következik, hogy $P_3AB\angle = P_3AE\angle - BAE\angle = BAC\angle - BAE\angle = EAC\angle$. Másrészt a tükrözés miatt $P_3AB\angle = BAP\angle$. E két eredményt összehasonlítva azt kapjuk, hogy a $BAP\angle$ szög és az $EAC\angle$ szög egyenlő. Ez viszont pontosan azt jelenti, hogy az AP és az AE egyenes tükrös az A-ból induló szögfelezőre. Az utóbbi azonos az AP' egyenessel. Ezzel az állításunk bizonyítását befejeztük.

11.1. A PA_1B_1, PB_2A_2 háromszögek hasonlóak, mert szögeik egyenlők: P-nél csúcsszögek vannak, míg $PA_2B_2\angle = A_1B_1P\angle$ és $B_1B_2A_2\angle = PB_2A_2\angle$. Valóban, a kör $\widehat{A_1B_2}$ ívéhez tartozik az $A_1A_2B_2\angle = PA_2B_2\angle$ és az $A_1B_1B_2\angle = A_1B_1P\angle$ szög, míg a $\widehat{B_1A_2}$ ívhez tartozik a $B_1A_1A_2\angle = B_1A_1P\angle$ és a $B_1B_2A_2\angle = PB_2A_2\angle$ szög.

A hasonlóságból:

$$\frac{PA_1}{PB_1} = \frac{PB_2}{PA_2},$$

azaz $PA_1 \cdot PA_2 = PB_1 \cdot PB_2$.

11.2. Az ábra a **??**. feladathoz képest kissé más, de PA_1B_1, PB_2A_2 háromszögek most is hasonlóak és az indoklás sem különböző, mint 11.1M-ben. A hasonlósági arány felírásából itt is a

$$PA_1 \cdot PA_2 = PB_1 \cdot PB_2 \tag{1}$$

összefüggéshez jutunk, melyet *Szelő-tétel* néven szokás említeni. A fenti (1) képletben szereplő szorzatok egyenlő értékét – amely tehát tetszőleges P-n átmenő szelőn számolható – a *P pont k körre vonatkozó hatványának* nevezzük.

Érdemes a hatványt előjelesen értelmezni. Ha P a kör belső pontja, akkor a P-től A_1 ellenkező irányban van, mint A_2, tehát a PA_1, PA_2 *irányított szakaszok* szorzata negatív. Ilyenkor a P pont körre vonatkozó hatványán is ezt a negatív előjelű számot értjük. Ha P a körön kívül helyezkedik el, akkor P-től A_1 és A_2 azonos irányban van, a hatvány értéke is pozitív.

Logikus a k körre illeszkedő pont k-ra vonatkozó hatványán a 0 számot érteni, a továbbiakban ezzel ez értelmezéssel dolgozunk. Az előjelezést tovább motiválja a 11.3. feladat, a fogalom egyszerűségét és hasznosságát mutatja a 11.4. példa.

11.3. Használjuk fel a szelő-tételt (lásd a 11.1M.), válasszunk egy speciális szelőt, azt, amelyik átmegy a k kör középpontján! Ha ezt a szelőt számegyenesnek tekintjük, amelyiknek origója a P pont és pozitív iránya P-től a kör O középpontja felé van (illetve tetszőleges irányban, ha $P = O$), akkor O a d számnál, a k kör és a szelő metszéspontjai a $(d + r)$, $(d - r)$ számoknál lesznek. A P pont k körre vonatkozó (előjeles) hatványa tehát $(d + r)(d - r) = d^2 - r^2$.

Megjegyezzük, hogy ez az eredmény tökéletesen megfelel a körre vonatkozó hatvány előjeles fogalmának is. Értéke pontosan akkor pozitív, ha $d > r$, tehát P a körön kívül helyezkedik el, akkor 0, ha $d = r$, tehát P a körön van és akkor negatív, ha $d < r$, tehát P a kör belsejében van.

11.5. Igaz. Legyenek az A_1, B_1, A_2 pontokon átmenő k körnek és a b egyenesnek a metszéspontjai B_1 és B_1'. A szelő-tétel szerint $PA_1 \cdot PA_2 = PB_1 \cdot PB_1'$, így $PB_1' = PB_2$, ahol a körre vonatkozó hatvány előjele alapján az is meghatározott, hogy P-től B_1' melyik irányban van, így B_1' megegyezik B_2-vel.

11.18. Ha a h egyenesnek a K, L körökkel való másik metszéspontjai V_K és V_L, akkor a nagyításnál egymásnak megfelelő szakaszok hosszának aránya egyenlő:

$$\frac{HV_L}{HU_K} = \frac{HU_L}{HV_K},$$

azaz

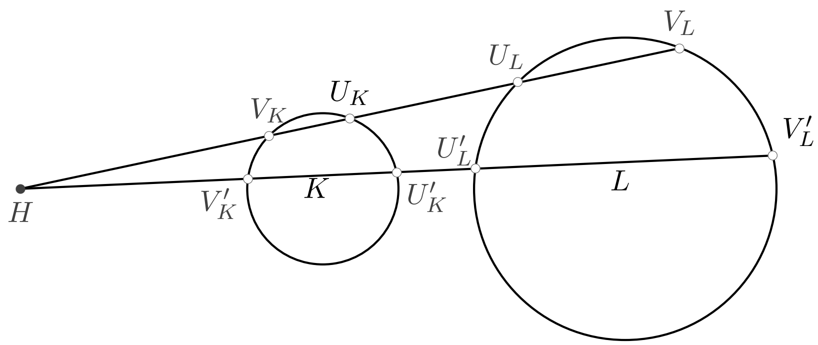
$$HV_L \cdot HV_K = HU_L \cdot HU_K. \tag{1}$$

Ha a H-t tartalmazó h' egyenes és a K, L körök metszéspontjai az előzőekhez hasonló elrendezésben U_K', V_K' és U_L', V_L', akkor egyrészt

$$HV_L' \cdot HV_K' = HU_L' \cdot HU_K', \tag{2}$$

másrészt

$$HV_L \cdot HU_L = HV_L' \cdot HU_L', \qquad HV_K \cdot HU_K = HV_K' \cdot HU_K', \tag{3}$$



11.18M.1. ábra.

hiszen ez a két egyenlet a szelőtétel a H pontra és a K körre, illetve H-ra és L-re (a H pont K, ill. L körre vonatkozó hatványa). A (1), (2), (3) összefüggések egymást követő alkalmazásával

$$(HU_L \cdot HU_K)^2 = HU_L \cdot HU_K \cdot HV_L \cdot HV_K = HU'_L \cdot HU'_K \cdot HV'_L \cdot HV'_K = (HU'_L \cdot HU'_K)^2,$$

azaz $|HU_L \cdot HU_K|$ értéke a h szelő választásától független állandó.

Másrészt $HU_L \cdot HU_K$ előjele is független h-tól, hiszen pozitív, ha H a külső hasonlósági pont és a K, L körök külsejében van vagy belső hasonlósági pont mindkét kör belsejében illetve $HU_L \cdot HU_K$ előjele negatív, ha külső hasonlósági pont a két kör belsejében vagy belső hasonlósági pont mindkét kör külsejében. Q.E.D.

Megjegyzés

Ha a két kör egymás eltoltja, akkor egyik hasonlósági pontjuk a „végtelenbe” megy, a hasonlósági ponton átfektetett szelők egymással párhuzamos szelőkké válnak. A Steiner hatvány ekkor is értelmezhető.

11.1.

1. megoldás. A 6.9. feladat b) részének megoldása szerint $d_a p_a = 2Rr$, másrészt $p_a d_a$ a beírt kör középpontjának a körülírt körre vonatkozó hatványának abszolút értéke, ami a $|d^2 - R^2|$ alakban is írható. A beírt kör a körülírt körön belül van, így $d < R$, azaz $R^2 - d^2 = 2Rr$, amit bizonyítani kellett.

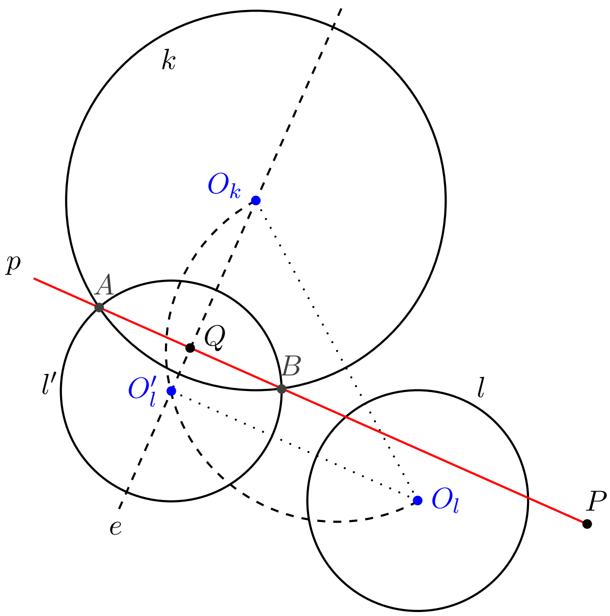
2. megoldás. Lásd a G.III.3.4. feladatot és megoldását.

11.2. Induljunk ki a kész ábrából. Jelölje az adott pontot P, a két kört k és l, középpontjaikat O_k és O_l, a megoldást jelentő p egyenes és k metszéspontjait A és B, az O_k-ból p-re állított merőlegest e, metszéspontjukat Q. Toljuk el az l kört a $\overrightarrow{PQ}$ vektorral! Az így kapott O'_l középpontú l' kör és a k kör közös centrálisa a p-re merőleges e. A p egyenesből a k, l körök egyenlő húrokat metszenek ki, ez épp azt jelenti, hogy l' átmegy az A, B pontokon (lásd az 1. ábrát).

Az O'_l pontot szeretnénk megszerkeszteni. A P pontnak az l' körre vonatkozó hatványa ismert, ez a $PA \cdot PB$ szorzattal egyenlő, ami a P pontnak a rögzített k körre vonatkozó hatványával egyenlő. Mivel l' sugara is adott (az l sugara), így a PO'_l távolság is adott (11.3. feladat). Másrészt az $O_l O'_l O_k$ háromszög O'_l-nél derékszögű, így O'_l illeszkedik az $O_k O_l$ szakasz Thalesz körére is. Tehát O'_l a Thalesz kör és a P középpontú PO'_l sugarú kör metszéspontjaként adódik.

11.4. A vizsgált kifejezés formailag nem szimmetrikus az A, B, C csúcsok szerepe szerint, de tartalmilag mégis fennáll a szimmetria. Megmutatható, hogy

$$\frac{BX \cdot CX}{A_1X} = \frac{CX \cdot AX}{B_1X} = \frac{AX \cdot BX}{C_1X}, \qquad (1)$$



11.2M.1. ábra.

ahol B_1 és C_1 a BX illetve a CX egyenes és a körülírt kör második metszéspontját jelöli.

Vegyük észre, hogy ha X az AC szakasz egyik látókörén mozog, akkor a CXA_1 háromszög szögei változatlanok, így a $\frac{CX}{A_1X}$ arány értéke is állandó. A $\frac{BX\cdot CX}{A_1X}$ tört értéke ezen az íven akkor lesz minimális, ha BX a legkisebb, azaz BX átmegy a látókör középpontján.

Tegyük fel, hogy az $f(X) = \frac{BX\cdot CX}{A_1X}$ függvénynek van minimális értéke az ABC háromszöglapon (ennek bizonyításától eltekintünk, a magasabb analízis elveivel igazolható a minimumhely létezése). Erre az X minimumhelyre illetve az előbb elmondottak, illetve a (1) egyenlet szerint teljesül, hogy AX, BX, CX rendre átmegy a BCX, a CAX, az ABX háromszög körülírt körének középpontján. A 6.15. feladat megoldása szerint a háromszög belsejében egyetlen ilyen pont van, a háromszög beírt körének I középpontja, tehát az a minimumhely.

A 6.9. feladat jelölései és c) részének eredménye alapján $f(I) = \frac{BI\cdot CI}{A_1I} = \frac{p_b\cdot p_c}{d_a} = 2r$, tehát az f függvény minimuma $2r$ és azt a beírt kör középpontjában veszi fel.

12. A sík hasonlósági transzformációi

12.3. Jelölje a P_1Q_1, P_2Q_2 egyenesek metszéspontját B (ha ezek párhuzamosak, akkor középpontos hasonlóságról van szó, azaz forgatás nem is kell). A P_1P_2B, Q_1Q_2B háromszögek körülírt körének B-től különböző (ill. B, ha nincs más) metszéspontja lesz a forgatva nyújtás középpontja (lásd a 12.1. feladatot).

12.7.

1. megoldás. Tekintsük azt a D centrumú forgatva nyújtást, amely B-t A-ba viszi. Legyen ennél a transzformációnál C képe C'. A DCB, $DC'A$ háromszögek most hasonlóak (lásd az 1. ábra bal oldalát), így

$$\frac{C'A}{CB} = \frac{DA}{DB} \tag{1}$$

azaz

$$C'A = \frac{DA \cdot CB}{DB}. \tag{2}$$

Másrészt az említett forgatva nyújtás szöge:

$$BDA\sphericalangle = CDC'\sphericalangle \tag{3}$$

aránya pedig

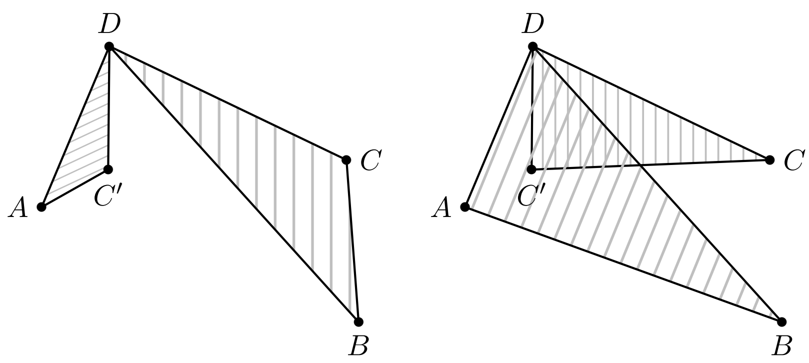
$$\frac{DC'}{DC} = \frac{DA}{DB}, \tag{4}$$

így a CDC', BDA háromszögek is hasonlóak (lásd az 1. ábra jobb oldalát), hiszen D-nél fekvő szögük (3) miatt, míg D-ből induló oldalaik aránya (4) miatt egyenlő. E hasonlóságból

$$\frac{CC'}{AB} = \frac{DC}{DB}, \tag{5}$$

azaz

$$CC' = \frac{DC \cdot AB}{DB}. \tag{6}$$



12.7M1.1. ábra.

Írjuk fel a háromszög-egyenlőtlenséget az ACC' háromszögre! $AC \le AC' + CC'$, azaz

$$AC \le \frac{DA \cdot CB}{DB} + \frac{DC \cdot AB}{DB}, \tag{7}$$

amiből DB-vel való átszorzással kapjuk a bizonyítandó egyenlőtlenséget.

Az $AC \le AC' + CC'$ háromszög-egyenlőtlenségben pontosan akkor teljesül az egyenlőség, ha C' az AC szakaszon van, azaz ha

$$CC'D\sphericalangle + DC'A\sphericalangle \equiv 180^\circ \pmod{360^\circ}. \tag{8}$$

A hasonlóságok miatt ezek a szögek kicserélhetőek és a feltétel ebben a formába írható át:

$$BAD\sphericalangle + DCB\sphericalangle \equiv 180^\circ \pmod{360^\circ}. \tag{9}$$

Két esetet különböztetünk meg: $BAD\sphericalangle \equiv 0 \pmod{180^\circ}$, vagy $BAD\sphericalangle \not\equiv 0 \pmod{180^\circ}$, azaz ha A a BD egyenesre esik vagy nem. Az előbbi esetben vagy $BAD\sphericalangle \equiv 0 \pmod{360^\circ}$ vagy $BAD\sphericalangle \equiv 180 \pmod{360^\circ}$, tehát A vagy a BD szakaszra vagy annak komplementerére esik a BD egyenesen. A (9) összefüggés azt mondja, hogy ekkor C is a BD egyenesre esik, de fordítva, mint A, tehát ha A a BD szakaszon van, akkor C annak komplementerén, míg ha A esik a komplementerre, akkor C a szakaszra.

Ha $BAD\sphericalangle \not\equiv 0 \pmod{180^\circ}$, akkor A a BD pontpár egy valódi látókörén van. Ekkor (9) szerint

$$BAD\sphericalangle + DCB\sphericalangle \equiv 0^\circ \pmod{180^\circ}, \tag{10}$$

azaz

$$BAD\sphericalangle \equiv BCD\sphericalangle \pmod{180^\circ}, \tag{11}$$

tehát C is ugyanazon a látókörön van, de mivel (9) szerint

$$BAD\sphericalangle \equiv 180^\circ + BCD\sphericalangle \pmod{360^\circ}, \tag{12}$$

így A és C a látókörön a BD húr ellenkező oldalára kerül.

Eredményeink igazolják a feladat állítását.

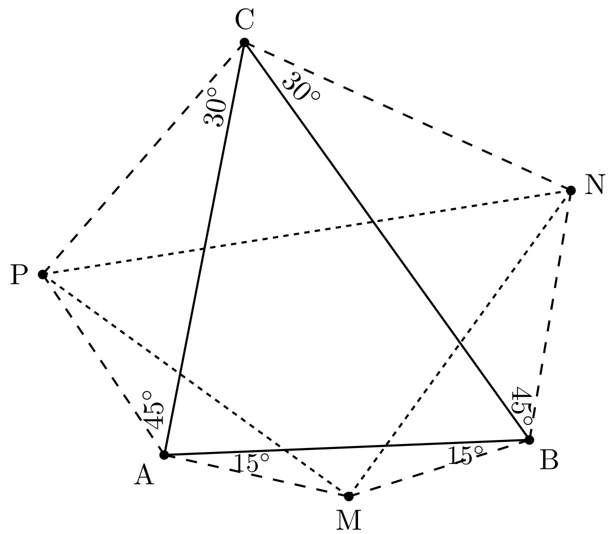
2. megoldás. Az összefüggés komplex számokkal is igazolható. Lásd a **??**. feladatot

12.1. [4]

Eredmény: $PMN\angle = 90^\circ$, $PM = PN$.

Nyilván feltehetjük, hogy az ABC háromszög pozitív körüljárású. Ebben az esetben irányítottan értelmezve:

$$BNC\angle = -105^\circ, \qquad BPA\angle = -105^\circ, \qquad AMB\angle = -150^\circ.$$



12.1M.1. ábra.

Legyen $\lambda = \frac{PC}{PA} = \frac{NC}{NB} = \frac{\sin 45^\circ}{\sin 30^\circ}$ és tekintsük az alábbi három forgatva nyújtást, mint transzformációját:

$N_\lambda^{-105^\circ}$: középpontja N, forgásszöge -105°, nyújtási arány λ.

$P_{\frac{1}{\lambda}}^{-105^\circ}$: középpontja P, forgásszöge -105°, nyújtási arány $\frac{1}{\lambda}$.

$M_1^{-105^\circ}$: középpontja M, forgásszöge -150°, nyújtási arány 1 (ez tehát egyszerű forgatás).

Tekintsük e három transzformáció kompozícióját:

$$\phi = M_1^{-105^\circ} \circ P_{\frac{1}{\lambda}}^{-105^\circ} \circ N_\lambda^{-105^\circ} \tag{1}$$

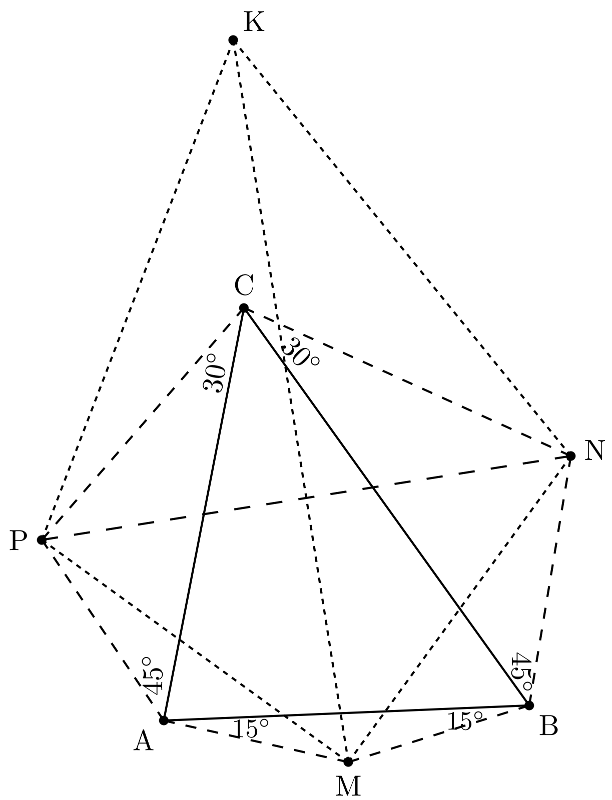
(tehát előbb $N_\lambda^{-105^\circ}$-t, majd $P_{\frac{1}{\lambda}}^{-105^\circ}$-t, végül $M_1^{-105^\circ}$-t hajtjuk végre.

Állítjuk, hogy a ϕ transzformáció az identitás. A ϕ transzformáció egybevágóság, hiszen egy λ és egy $\frac{1}{\lambda}$ arányú hasonlóság szerepel benne, tehát minden szakasz képe olyan hosszú lesz, mint eredetileg volt. A ϕ transzformáció körüljárástartó, hiszen minden összetevője is az. A ϕ transzformációnál bármely irányított szakasz képe az eredeti szakasszal párhuzamos és azonos irányítású, hiszen a nagyítások nem változtatják a szakasz állását, a forgási szögek összege pedig $-105° + -105° + -150° = -360°$. Mindezekből következik, hogy ϕ egy eltolás. A transzformációkat úgy értelmeztük, hogy $\phi(B) = B$ is teljesüljön. Valóban,

$$\phi(B) = M_1^{-105°} \circ P_{\frac{1}{\lambda}}^{-105°} \circ N_\lambda^{-105°}(B) = M_1^{-105°}\left(P_{\frac{1}{\lambda}}^{-105°}\left(N_\lambda^{-105°}(B)\right)\right) =$$

$$= M_1^{-105°}\left(P_{\frac{1}{\lambda}}^{-105°}(C)\right) = M_1^{-105°}(A) = B.$$

A ϕ transzformáció tehát egy olyan eltolás, amelynek van fixpontja, tehát ϕ valóban az identitás.



12.1M.2. ábra.

Tekintsük most az M pont „pályáját” a (1) transzformáció fokozatos végrehajtásánál! Legyen

$$N_\lambda^{-105°}(M) = K.$$

Ekkor szükségéppen

$$P_{\frac{1}{\lambda}}^{-105°}(K) = M,$$

hiszen

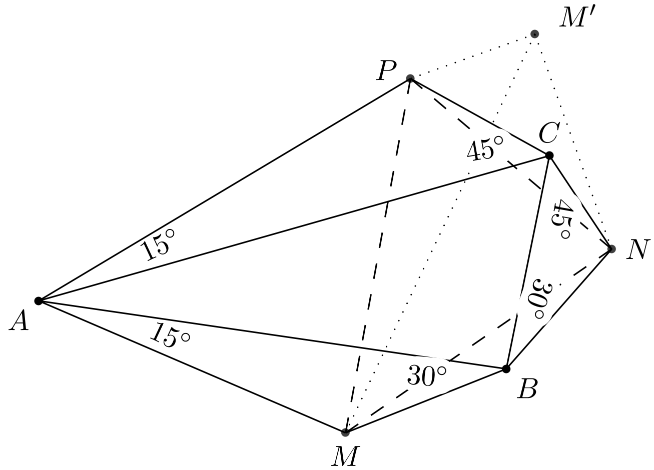
$$M = \phi(M) = M_1^{-105°}\left(P_{\frac{1}{\lambda}}^{-105°}\left(N_\lambda^{-105°}(M)\right)\right) = M_1^{-105°}\left(P_{\frac{1}{\lambda}}^{-105°}(K)\right),$$

és a $M_1^{-105°}$ transzformáció csak az M pontot képezi M-be.

Megmutatjuk, hogy az $MNKP$ négyszög deltoid, melynek szimmetriatengelye MK és a P-nél fekvő szöge $90°$. A BNC, MNK háromszögek hasonlók, hiszen N-nél fekvő szögük és N melletti oldalaik hosszának aránya is egyenlő (gondoljunk az $N_\lambda^{-105°}$ transzformációra). Az APC, MPK is hasonlók (most $M_1^{-105°}$-re gondoljunk). Mivel megadott adataik alapján az APC, BNC háromszögek is hasonlók, így a MNK, MPK háromszögek is hasonlók. Ezek egy megfelelő oldala egybeesik, így egybevágók is. Tehát $MNKP$ valóban MK szimmetriatengelyű deltoid, és $KMN\angle = CBN\angle$ révén M-nél fekvő szöge $90°$.

A PMN háromszög tehát egyenlő szárú és derékszögű.

12.2. Tegyük fel, hogy az ABC pozitív körüljárású háromszög. Tekintsük azokat a forgatva nyújtásokat, amelyek középpontja rendre M, N és P és amelyek rendre A-t B-be, B-t C-be, C-t A-ba képezik.



12.2M.1. ábra.

Az AMB, BNC, CPA háromszögekben kiszámolhatók a transzformációk forgásszögei és a nyújtások arányai (lásd az 1. ábrát). Tehát az alábbi forgatva nyújtásokat vizsgáljuk:

$$M_m^{-135°}, \qquad N_n^{-105°}, \qquad P_p^{-120°}, \tag{1}$$

ahol az m, n, p nagyítási arányok értéke

$$m = \frac{\sin 15°}{\sin 30°}, \qquad n = \frac{\sin 30°}{\sin 45°}, \qquad p = \frac{\sin 45°}{\sin 15°}. \tag{2}$$

Vegyük észre, hogy a transzformációk

$$\phi = P_p^{-120°} \circ N_n^{-105°} \circ M_m^{-135°} \tag{3}$$

kompozíciójánál (előbb az $M_m^{-135°}$, majd az $N_n^{-105°}$, végül a $P_p^{-120°}$ forgatva nyújtást végezzük el) bármely irányított szakasz összesen

$$(-120°) + (-105°) + (-135°) = (-360°)$$

-kal fordul el, és hossza a

$$m \cdot n \cdot p = \frac{\sin 15°}{\sin 30°} \cdot \frac{\sin 30°}{\sin 45°} \cdot \frac{\sin 45°}{\sin 15°} = 1$$

-szeresére változik, tehát egy eltolásról van szó. A ϕ transzformáció azonban az identitás (a $\underline{0}$ vektorral való eltolás), hiszen az A pont a transzformáció fixpontja.

Mivel az identitásnak az M pont is fixpontja, így ha $N_n^{-105°}(M) = M'$, akkor $P_p^{-120°}(M') = M$. Az MNM', BNC háromszögek hasonlóak, hiszen az $N_n^{-105°}$ transzformációnál M képe M', míg B képe C. Ebből adódik, hogy $NMM'\angle = NBC\angle = 30°$. A $P_p^{-120°}$ transzformáció vizsgálatából hasonlóan adódik, hogy $M'MP\angle = CAP\angle = 15°$, tehát

$$NMP\angle = 30° + 15° = 45°.$$

Végül M helyett az N, P pontokat hasonlóan vizsgálva kapjuk, hogy

$$PNM\angle = 45° + 30° = 75°, \qquad MPN\angle = 15° + 45° = 60°.$$

12.3. Tegyük fel, hogy a feladatban említett háromszögek mind pozitív körüljárásúak. Tekintsük a C középpontú $\sqrt{3}$ arányú, 30°-os forgatva nyújtás és a B középpontú 60°-os forgatás

$$\phi = B^{60°} \circ C_{\sqrt{3}}^{30°}$$

kompozícióját. Mivel

$$C_{\sqrt{3}}^{30°}(Q) = A, \qquad C_{\sqrt{3}}^{30°}(P) = N$$

és

$$B^{60°}(A) = M, \qquad B^{60°}(N) = C,$$

így

$$\phi(Q) = M, \qquad \phi(P) = C.$$

A ϕ transzformáció összesen 90°-kal forgat és $\sqrt{3}$ arányban nyújt, így az állítást igazoltuk.

12.4. Legyen $ABCD$ pozitív körüljárású és jelölje a BC, DA oldalakra kifelé emelt szabályos háromszögek középpontját P ill. Q, az AB, CD oldalakra emelt szabályos háromszögek harmadik csúcsát M ill. N. Tekintsük az M körüli $-60°$, a P körüli $-120°$, az N körüli $-60°$ és a Q körüli $-120°$ forgatások

$$\psi = Q^{-120°} \circ N^{-60°} \circ P^{-120°} \circ M^{-60°}$$

kompozícióját. A ψ transzformáció összesen $-360°$-kal forgat és az A pont fixpontja, így ψ az identitás. Tekintsük most a

$$\psi_1 = \circ P^{-120°} \circ M^{-60°}, \qquad \psi_2 = Q^{-120°} \circ N^{-60°}$$

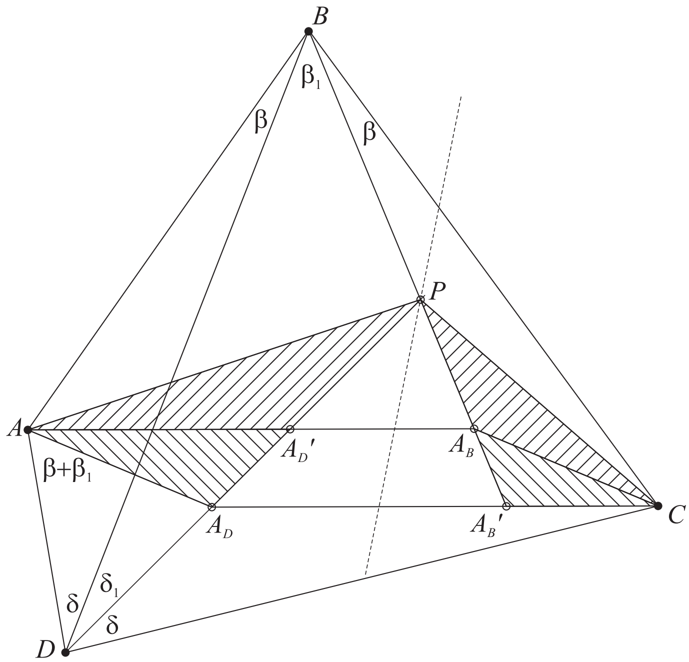
kompozíciókat! A ψ_1 transzformáció egy 90°-os forgatás, melynek középpontja az az O_1 pont, amelyre az MO_1P háromszög félszabályos: és

$$PMO_1\angle = 30°, \qquad O_1PM\angle = 60°, \qquad MO_1P\angle = 90°,$$

míg ψ_2 egy 90°-os forgatás, melynek O_2 középpontjára NO_2Q félszabályos:

$$QNO_2\angle = 30°, \qquad O_2QN\angle = 60°, \qquad NO_2Q\angle = 90°.$$

Mivel $\psi = \psi_2 \circ \psi_1$ az identitás, így O_1 és O_2 megegyezik. E közös pont körüli $\sqrt{3}$ arányú, 90°-os forgatva nyújtás a PQ szakaszt NM-be viszi, e két szakasz tehát merőleges egymásra és arányuk $\sqrt{3}$.



12.1M.1. ábra.

12.1. (*A Ptolemaiosz tétel klasszikus bizonyításának mintájára*)

1. Tekintsük azt a B középpontú forgatva nyújtást, amely D-t C-be viszi. Ennek aránya $\lambda_1 = \frac{BC}{BD}$, szöge $\beta + \beta_1$, A képe A_B. AD képe A_BC, így $A_BC = \frac{BC}{BD}AD$.

1.a. Könnyen igazolható, hogy $ABCD$ pontosan akkor húrnégyszög, ha A_B illeszkedik az AC szakaszra.

1.b. A forgatva nyújtások révén az ABA_B, DBC háromszögek B-nél fekvő szögei és a B melletti oldalaik aránya egyenlő, így ezek a háromszögek hasonlóak. Következésképpen $AA_B = \frac{AB}{BD}DC$.

2. Tekintsük azt a D középpontú forgatva nyújtást, amely B-t C-be viszi. Ennek aránya $\lambda_2 = \frac{DC}{DB}$, szöge $\delta + \delta_1$, A képe A_D. AB képe A_DC, így $A_DC = \frac{DC}{DB}AB$.

2.a. Könnyen igazolható, hogy $ABCD$ pontosan akkor húrnégyszög, ha A_D illeszkedik az AC szakaszra.

2.b. A forgatva nyújtások révén az ADA_D, BDC háromszögek D-nél fekvő szögei és a D melletti oldalaik aránya egyenlő, így ezek a háromszögek hasonlóak. Következésképpen $AA_D = \frac{AD}{DB}BC$.

3.a. 1.b. és 2. összevetéséből kapjuk, hogy $AA_B = A_DC$, míg 1. és 2.b együtt azt adja, hogy $A_BC = AA_D$. Az AA_BCA_D négyszög tehát vagy valódi paralelogramma, vagy az AC szakasszá fajul. Az utóbbi eset pontosan akkor következik be, ha $ABCD$ húrnégyszög.

3.b. A feladat szövegében definiált P pont a DA_D, BA_B egyenesek metszéspontja. Legyen továbbá A'_D az AA_B, DA_D egyenesek metszéspontja, A'_B pedig a CA_D, BA_B egyenesek metszéspontja.

4.a. Az $AA_DA'_D$, CA'_BA_B háromszögek hasonlóak és ellenkező körüljárásúak, hiszen két szögük is egyenlő: $A_DAA'_D\angle = A'_BCA_B$, mert ezek a 3.a. paralelogramma szemköztes szögei; míg $AA_DA'_D\angle = CA'_BA_B\angle$, mert ezek az ADA_D, illetve a BAA_B háromszög A_D-nál illetve A_B-nál fekvő külső szögével, azaz mindkét esetben $(\beta+\beta_1+\delta+\delta_1)$-gyel egyenlők.

4.b. Az $AA_DA'_D$, CA'_BA_B háromszögeket az $A_DPA'_B$ szög szögfelezőjére vonatkozó tükrözés és egy P centrumú középpontos hasonlóság viszi egymásba. Valóban, a tükrözés A PA_D félegyenest a P_AB' félegyenesre képezi, a $\lambda = \frac{PA_B}{PA'_D}$ arányú nagyítással pedig A'_D végül A_B-be, A_D pedig A'_B-be, hiszen A'_DA_B és $A_DA'_B$ párhuzamosak, így $\lambda = \frac{PA'_B}{PA_D}$. Az irányításváltó hasonlóságot már meghatározza két pont és a képe, így A biztosan C-be megy át a megadott kompozíciónál.

5.a. A 4.b.-ben magadott transzformáció a PAA_D háromszöget a PCA'_B háromszögbe képezi, tehát ez a két háromszög hasonló. Ez a két háromszög akkor is hasonló, ha az $AA_DA'_D$, CA'_BA_B háromszögek nem valódiak ($ABCD$ húrnégyszög), mert az ilyen elfajult eset a nem elfajult esetek ($ABCD$ nem húrnégyszög) határhelyzeteként állítható elő (pld. A egy egyenes mentén mozoghat, míg B, C, D rögzített).

5.b. A PAA_D, PCA'_B hasonló háromszögek pontosan akkor egybevágóak, ha $PA = PC$, illetve pontosan akkor, ha $CA'_B = AA_D$. Az alábbi két bekezdésben látni fogjuk, hogy a $CA'_B = AA_D$ feltétel pontosan akkor teljesül, ha az AA_DCA_B paralelogramma az AC szakasszá fajul. Ezzel a feladat állítása igazolást nyer.

5.c. Egyrészt, ha paralelogrammáról van szó, akkor $A_D = A'_D$ és $A_B = A'_B$, így $AA_D = A_BC = CA'_B$.

5.d. Másrészt, ha teljesül a $CA'_B = AA_D$ feltétel és létrejönnének a valódi $AA_DA'_D$, CA'_BA_B háromszögek, akkor az AA_DCA_B paralelogramma középpontjára szimmetrikusak lennének, az $A_DA'_D$, A'_BA_B egyenesek egyállásúak lennének, közös pontjuk (P) csak akkor lenne, ha egybeesnének, tehát ha az A_D és A'_B pontok, illetve az A_B, A'_D pontok egybeesnének, azaz ha az A_DA_B egyenes megegyezne AB-vel. Ez éppen az a kizárt eset, amikor DB felezi az ADC, ABC szögeket.

13. Parabola, ellipszis, hiperbola

Ez a fejezet nem tartalmaz megoldást.

14. Térgeometria

14.1. A két pont lehet a vizsgált síknak azonos oldalán vagy ellenkező oldalán. Ha azonos oldalon vannak, akkor a sík pontosan akkor megfelelő, ha párhuzamos az egyenessel,. Ha különböző oldalon vannak, akkor pedig pontosan az a sík jó, amely átmegy a két pontot összekötő szakasz felezőpontján (részletesebben: 3.9M.).

14.2. Számoljuk meg, hogy a négy pont közül hány van a sík egyik és hány a másik oldalán! Ebből a szempontból alapvetően három esetet különböztethetünk meg:

a) 4 és 0; **b)** 3 és 1; **c)** 2 – 2.

A sík egyik oldalán, tőle adott távolságra levő pontok egy – az eredetivel párhuzamos – síkon helyezkednek el. Így az a) eset nem is fordulhat elő valódi tatraéeder esetén. A b) esetben az adott síknak párhuzamosnak kell lennie a tetraéder három csúcsának síkjával, azaz egyik lapjával. A negyedik csúcstól pontosan akkor van ezekkel egyenlő távolságban a sík, ha az ebből a csúcsból kiinduló élek felezőpontjain megy át. 4 ilyen sík van, minden csúcshoz egy. A c) esetben a sík párhuzamos a tetraéder egyik élének egyenesével és a hozzá kitérő él egyenesével is. Ezek pontosan azok a síkok, amelyek átmennek a másik négy él felezőpontján. Ilyen síkból 3 van, minden kitérő élpárhoz egy.

Összesen tehát 7 megfelelő sík van.

15. Axiomatikus térgeometria

15.2. Legyen e és Σ két metszéspontja A és B. Vegyünk egy pontot a síkon, ami nincs rajta e-n (**ntS.** axióma), legyen ez P. Húzzunk párhuzamost P-n keresztül e-vel (**S2.** axióma). Van olyan sík, ami tartalmazza az így kapott egyenest és e-t is (párhuzamosság definíciója). Viszont az A, B, P pontokat csak egy sík tartalmazza (**T1.** axióma), és ez a Σ. Ezért $e \subset \Sigma$.

15.3. a) Legyen a két egyenes metszéspontja P. Vegyünk fel egy-egy pontot mindkét egyenesen, E-t és F-et (**ntE.** axióma). A keresett síknak tartamaznia kell a P, E, F pontokat. Ilyen síkból a **T1.** axióma szerint pontosan egy van. Ebben a síkban a 15.2. feladat eredménye szerint e és f is benne van.

b) Vegyünk fel két pontot az e-n (**ntE.** axióma). A keresett síknak tartalmaznia kell ezt a két pontot és P-t. A **T1.** axióma szerint pontosan egy ilyen sík van. Ebben a síkban a 15.2. feladat eredménye szerint a teljes e egyenes benne van.

c) A párhuzamosság definíciója szerint van ilyen sík, a **T2.** axióma szerint nem lehet kettő.

15.4. a) Mivel van két pontja (**ntE.** axióma), és ezen a két ponton csak egy egyenes halad át (**S1.** axióma), ezért megegyeznek.

b) Ha a két sík különböző, akkor a metszetük, tehát az első sík, egy egyenes (**T2.** axióma). Egy síknak viszont van három pontja, ami nincs egy egyenesen (**ntS.** axióma), így ellentmondásra jutottunk.

15.7. a) Jelölje az adott egyenest f, a vele párhuzamos síkot Σ. Legyen Σ_f tetszőleges f-et tartalmazó sík. Ha Σ_f-nek nincs közös pontja Σ-val, akkor párhuzamos vele (**??**. feladat). Ha van közös pontjuk, akkor a metszésvonal egy m egyenes (**T2.** axióma). Az m egyenes Σ-n fekszik, így nincs közös pontja f-fel. Másrészt m és f egy síkban vannak, a Σ_f síkban, így párhuzamosak.

b) Jelölje az adott egyenest f, az adott síkot Σ, a Σ-n fekvő f-fel párhuzamos egyenest e. Legyen e és f síkja Π (a párhuzamosság definíciója). $e \subset \Sigma$, és $e \subset \Pi$, ezért e két síknak van közös pontja (**ntE.** axióma). Így $e \subset \Sigma \cap \Pi$ (**T2.** axióma), ezért $e = \Sigma \cap \Pi$ (15.4. feladat). Másrészt $f \subset \Pi$, így $f \cap \Sigma \subset e$. Lévén $f \parallel e$, ezért $f \cap \Sigma = \emptyset$, vagyis $e \parallel \Sigma$.

15.8. a) A két létrejövő metszésvonal egy-egy egyenes (**T2.** axióma). Ez a két egyenes egy síkban van és nincs közös pontjuk, hiszen olyan síkokban vannak, amelyeknek nincs közös pontjuk. Tehát a két egyenes párhuzamos.

b) Tekintsük a Σ síkot és a rá nem illeszkedő P pontot. Vegyük fel a Σ síkban az egy egyenesre nem illeszkedő A, B, C pontokat (**ntS.** axióma), és vegyük fel az A, B pontokon átmenő e, illetve az A és C pontokon átmenő f egyenest (**S1.** axióma). Legyen a P-n átmenő e-vel ill. f-fel párhuzamos egyenes $e\prime$, ill. $f\prime$ (**S2.** axióma). Ha ez a két egyenes megegyezne egymással, akkor az A ponton átmenő e és f egyenes is párhuzamos lenne vele, ami ellentmond az **S2.** axiómának. Az $e\prime$, $f\prime$ egyenesek tehát különböznek.

Pontosan egy olyan sík van, amely az $e\prime$ és az $f\prime$ egyenest is tartalmazza (15.3. feladat), jelölje ezt $\Sigma\prime$.

Állítjuk, hogy ha egy sík párhuzamos a Σ síkkal, akkor az tartalmazza az $e\prime$, $f\prime$ egyeneseket, tehát a párhuzamos sík csak $\Sigma\prime$ lehet. Valóban, tekintsünk egy tetszőleges olyan síkot, jelben Π, amely párhuzamos Σ-val és átmegy P-n. Tekintsük még az e egyenes és a P pont által meghatározott $\Pi_{e,P}$ síkot. Erre a síkra alkalmazható az a) feladatrész állítása, azaz egy P-n átmenő e-vel párhuzamos egyenesben metszi Π-t. Pontosan egy ilyen egyenes van (**S2.** axióma), nevezetesen $e\prime$, tehát $e\prime \in \Pi$. Hasonlóan igazolható az is, hogy $f\prime \in \Pi$, tehát csak a $\Sigma\prime$ sík lehet a P-n átmenő Σ-val párhuzamos sík.

Igazolnunk kell még, hogy $\Sigma\prime$ párhuzamos Σ-val. Tegyük fel, hogy nem párhuzamosak. Metszetük így a **T2.** axióma szerint egy g egyenes. Az $e\prime$ egyenes egy síkban ($\Sigma\prime$) van g-vel, így vagy metszi vagy párhuzamos vele. Tegyük fel, hogy metszi, mondjuk az E pontban. Az E pont nincs rajta az e egyenesen, hiszen e-nek és $e\prime$-nek nincs közös pontja. Így pontosan egy olyan sík van, amely az e egyenest és az E pontot is tartalmazza (15.3. feladat b. része). Ez a sík tehát Σ, ebben kell tehát lennie az E-n átmenő e-vel párhuzamos egyetlen egyenesnek (**S2.** axióma és a párhuzamosság definíciója), az $e\prime$ egyenesnek is, így a $P \in e\prime$ pontnak is. Ez ellentmondás, hiszen $P \notin \Sigma$. Hasonlóan zárható ki az is, hogy az $f\prime$ egyenes messe g-t. Ha viszont $e\prime$ és $f\prime$ is párhuzamos g-vel, akkor a P ponton át két párhuzamos is húzható vele, ami ellentmond az **S2.** axiómának. Tehát $\Sigma\prime$ valóban párhuzamos Σ-val.

c) Ha $R \in \Sigma\prime$ a P ponttól különböző pont, akkor az R, P, A pontok egyértelműen meghatároznak egy Π_R síkot (**T1.** axióma), amely az a) rész állítása szerint egy olyan egyenesben metszi Σ-t, amely párhuzamos a PR egyenessel. A $\Sigma\prime$ sík minden pontján átmegy egy olyan egyenes, amely párhuzamos a Σ sík A ponton átmenő megfelelő egyenesével.

15.9. a) Jelölje a metsző síkokat Σ_a és Σ_b, a rajtuk található egymással párhuzamos egyeneseket a ill. b, a két sík metszésvonalát m. Ha a vagy b megegyezik m-mel, akkor az állítás nyilvánvalóan teljesül. Ha egyik sem egyezik meg m-mel, akkor csak azt kell kizárni, hogy bármelyik metszi m-et.

A b egyenes párhuzamos a Σ_a sík egy egyenesével, a-val. A 15.7. feladat b) részének eredménye szerint – mivel $b \notin \Sigma_a$ – b párhuzamos a Σ_a síkkal, tehát az $m \subset \Sigma_a$ egyenest sem metszi. Hasonlóan igazolható, hogy a sem metszi m-et.

b) Jelölje a vizsgált egyenest c, a két síkot Σ_a és Σ_b, metszésvonalukat m, a metszésvonal egy pontját P. Azt kell megmutatnunk, hogy m és c egy síkban van.

Van egy olyan sík, amely c-t és P-t is tartalmazza (A 15.3. feladat). Jelölje ezt Π. A $\Pi \cap \Sigma_a$ és a $\Pi \cap \Sigma_b$ ponthalmaz is egy-egy egyenes (**T2.** axióma) és mindkettő párhuzamos c-vel, hiszen egy síkban vannak c-vel (Π-ben) és nem metszik (hiszen Σ_a és Σ_b sem metszi c-t). Ez a két egyenes átmegy P-n, így a **S2.** axióma egyértelműségi része alapján megegyeznek egymással. Ez az egyenes a Σ_a és a Σ_b síkon is rajta van, tehát azok metszésvonala. A metszésvonal tehát párhuzamos c-vel.

15.10. Ha az a, b, c egyenesek között vannak megegyezők, akkor az állítás magától értetődik. Ha a három egyenes ugyanabban a síkban van, akkor csak azt kell megmutatnunk, hogy c nem metszi a-t. Ez is egyszerű, hiszem ha lenne metszéspont, akkor azon keresztül menő a és c is párhuzamos lenne b-vel ellentmondva az **S2.** axiómának.

Ha az a, b, c egyenesek nincsenek mind egy síkban, akkor tekintsük a c egyenes egy a-ra nem illeszkedő C pontját, valamint az a egyenest és a C pontot tartalmazó $\Sigma_{a,C}$ síkot (15.3. feladat b. része), továbbá a b, c egyenesek $\Sigma_{b,c}$ síkját. A $\Sigma_{a,C}$, $\Sigma_{b,c}$ síkokra az a, b egyenesekkel alkalmazható a 15.9. feladat a) részének állítása, azaz $\Sigma_{a,C}$ és $\Sigma_{b,c}$ metszésvonala párhuzamos a-val és b-vel. Ez a metszésvonal tartalmazza a b egyenessel párhuzamos c egyenes C pontját, így az **S2.** axióma szerint ez az metszésvonal a c egyenes, ami tehát párhuzamos a-val is.

15.11. a) Jelölje a két egyenest e és f, az e egy tetszőleges pontját E (**ntE.** axióma), az E-t tartalmazó, f-fel párhuzamos egyenest f_E (**S2.** axióma).

Legyen Σ_e olyan sík, amely tartalmazza e-t és párhuzamos f-fel. Állítjuk, hogy $f_E \subset \Sigma_e$. Valóban, az sík, amely tartalmazza f-et és E-t is (15.3. feladat) a Σ_e síkot olyan egyenesben metszi, amely párhuzamos f-fel (15.7. feladat), tehát f_E-ben (**S2.** axióma f-re és E-re alkalmazva), azaz $f_E \subset \Sigma_e$.

Egyetlen olyan sík van, amely tartalmazza e-t és f_E-t is, jelölje ezt Π_e. Ez lehet az egyetlen olyan sík, amely tartalmazza e-t és párhuzamos f-fel.

Legyen F az f egyenes tetszőleges pontja, e_F az F-et tartalmazó e-vel párhuzamos egyenes, Π_f pedig az f, e_F egyenesek síkja. A fentiek szerint (e-f szerepcserével igazolható) Π_f lehet az egyetlen olyan sík, amely tartalmazza f-et és párhuzamos e-vel.

Meg kellene mutatnunk, hogy Π_e valóban párhuzamos f-fel és Π_f e-vel. A b) rész igazolásával ez fölöslegessé válik.

b) Megmutatjuk, hogy a fent konstruált Π_e, Π_f síkok párhuzamosak egymással. Nem azonosak, hiszen e és f kitérők, így csak azt kell kizárni, hogy metszetük egy m egyenes (**T2.** axióma).

Ha alkalmazzuk a 15.9. feladat a) részének állítását a Π_e, Pi_f síkokra és az e, e_F egyenesekre, akkor azt kapjuk, hogy m párhuzamos e-vel, ha pedig ugyanezt az állítást a Π_e, Pi_f síkokra és az f, f_E egyenesekre alkalmazzuk, akkor az jön ki, hogy m párhuzamos f-fel. Az m egyenes tehát párhuzamos e-vel és f-fel is, így a párhuzamosság tranzitivitása (15.10. feladat) szerint e és f is párhuzamosak egymással. Ez ellentmond annak, hogy e és f kitérőek, tehát kizárható az a lehetőség, hogy Π_e, Pi_f metszete nem üres.

15.12. a) Legyen A, B, C három pont Σ-n, amelyek nincsenek egy egyenesen (**ntS.** axióma). Az $e = AB$ egyenessel (**S1.** axióma) húzzunk párhuzamost C-n át (**S2.** axióma), legyen ez f. Az e és f egyenesek síkja (15.2. feladat) megegyezik Σ-val, mert A, B, C mindkettőn rajta van (**T1.** axióma), tehát $f \subset \Sigma$. f-nek van még egy D pontja is (**nte.** axióma), és ez benne van Σ-ban.

b) Legyen A, B, C, D négy pont, amelyek nincsenek egy síkban és egy egyenesen sem (**ntT.** axióma). Tekintsük az A, B, C pontokon átmenő síkot (**T1.** axióma), valamint az ezzel párhuzamos D ponton átmenő síkot (15.8. feladat). Mindkettőn legalább négy pont van, így összesen legalább nyolc.

15.15. Első megközelítésben a merőlegesség egyenesek közötti viszony (reláció). Bármely két egyenes vagy merőleges egymásra, vagy nem merőlegesek. Ha az a, b egyenesek merőlegesek egymásra, akkor azt így jelöljük: $a \perp b$.

Javasolt axiómák:

M1. Ha $a \perp b$, akkor $b \perp a$ (a merőlegesség szimmetrikus reláció);

M2. Ha $a \perp b$ és $b||c$, akkor $b \perp c$ (a merőlegesség csak az egyenesek állásától függ);

M3. Adott egyenes adott pontján átmenő, az adott egyenesre merőleges egyenesek uniója sík;

M4. A $a \perp a$ sohasem teljesül (nincs olyan egyenes, amely merőleges önmagára);

16. Speciális témák

16.7. a) $L(d,n) = \frac{\pi d}{6} \cdot (2^n + 4) \cdot (2^n - 1)$.

b) $W(d,n) = \pi d \cdot 3^{\frac{3\cdot(n-1)}{2}}$.

16.1. Az érintőszárú kerületi szögek tétele szerint a k_1 körnek a háromszög belsejébe eső bármely P pontjára igaz, hogy $CBP\angle = BAP\angle$. Ugyanígy a k_2 körnek a háromszög belsejébe eső bármely P pontjára igaz, hogy $ACP\angle = CBP\angle$.

E két kör Q metszéspontjára tehát igaz, hogy $ACQ\angle = CBQ\angle = BAQ\angle$. Tekintsük most az AQC háromszög köré írt kört. Ebben a körben az AQ ívhez tartozó $ACQ\angle$ kerületi szög megegyezik a $QAB\angle$ szöggel. Az érintő szárú kerületi szögre vonatkozó tétel megfordítása szerint tehát az AB egyenes A-ban érinti ezt a kört. Vagyis az AQC háromszög köré írt kör éppen a feladatban szereplő k_3 kör.

Ezzel beláttuk, hogy a feladatban szereplő három kör egy ponton, a Q ponton megy keresztül.

Megjegyzés. Ugyanígy kapjuk, hogy egy ponton megy át
– a B-n átmenő, az AC oldalt A-ban érintő,
– a C-n átmenő, a BA oldalt B-ben érintő, valamint
– az A-n átmenő, a CB oldalt C-ben érintő
három kör is.

16.5. X és Z rajta van BQ Thálész-körén, tehát $XQZB$ húrnégyszög. A kerületi szögek tétele szerint $XBQ\angle = XZQ\angle$. Hasonlóan kapjuk, hogy $YZQ\angle = YAQ\angle$. Másrészt $YAZ\angle = BAC\angle$ a feladat feltétele szerint egyenlő az $YZX\angle$ szöggel. Ebből következik, hogy

$$QAB\angle = CAB\angle - YAQ\angle = YZX\angle - YZQ\angle = QZX\angle = QBX\angle.$$

Hasonlóan kapjuk, hogy $QCA\angle = QAB\angle$, tehát Q azonos a 16.2. feladat Q pontjával, amelyről viszont láttuk, hogy megegyezik a 16.1. feladatban szereplő ponttal. Vagyis ismét a háromszög (egyik) Brocard-pontját kaptuk. Erről a 16.4. feladatból tudjuk, hogy valóban megfelel a feladat feltételének.

Megjegyzés. Azt kaptuk, hogy három olyan pont van a háromszögben, amelynek az oldalakra eső merőleges vetületei az eredetihez hasonló, vele egyező körüljárású háromszöget adnak: a köré írt kör középpontján kívül a két Brocard-pont. A két Brocard-pont esetében azt is kaptuk, hogy a merőleges vetületek háromszöge az eredeti háromszögből a megfelelő Brocard-pont körüli forgatva nyújtással (pontosabban: kicsinyítéssel) jön létre. A forgatás szöge a Brocard-szög.

16.1. Tükrözzük a P pontot egyrészt az AB, másrészt az AC oldal egyenesére, a kapott két tükörkép legyen P_3 és P_2. A tengelyes tükrözés tulajdonságaiból azonnal következik, hogy $P_3AP_2\angle = 2BAC\angle$ és $AP_3 = AP = AP_2$. Jelölje továbbá e az AP egyenesnek az A-ból induló belső szögfelezőjére vonatkozó tükörképét és jelölje E ennek egy, a háromszög belsejébe eső pontját.

Megmutatjuk, hogy az e egyenes éppen a $P_3AP_2\angle$ szög szögfelezője. Ugyanis a $P_3AE\angle =$ $= P_3AB\angle + BAE\angle$. Itt a $P_3AB\angle$ szög az AB oldalra való tükrözés miatt egyenlő a $BAP\angle$ szöggel, ez utóbbi viszont a szögfelezőre való tükrözés miatt egyenlő az $EAC\angle$ szöggel. Szintén a szögfelezőre való tükrözés miatt a $BAE\angle = PAC\angle$, tehát a $P_3AE\angle = BAP\angle + PAC\angle =$ $= BAC\angle$, ami épp a fele a $P_3AP_2\angle$ szögnek.

Eredményeinket összevetve azt kapjuk, hogy az e egyenes egyrészt felezi a $P_3AP_2\angle$ szöget, másrészt $AP_3 = AP_2$, vagyis e a P_3P_2 szakasz oldalfelező merőlegese.

Legyen P_1 a P pont tükörképe a BC egyenesre. Szimmetria meggondolásokból azt kapjuk, hogy a feladatban szereplő három „új" egyenes a $P_1P_2P_3$ háromszög három oldalfelező merőlegese. Ezekről pedig tudjuk, hogy egy ponton mennek keresztül.

Természetesen a külső szögfelezőkre tükrözve ugyanezeket az egyeneseket kapjuk (csak fordított irányítással, de az irányítás a mi esetünkben nem játszik szerepet), tehát a feladat állítása változatlanul igaz marad külső szögfelezőkre is.

Ha P nem a háromszög belsejében van, de nem is a határán, akkor a fenti bizonyítás – végig irányított szögeket véve – változatlanul működik. Egyetlen esetben van baj: ha a P_1, P_2 és P_3 pont egy egyenesbe esik, tehát nem alkot háromszöget. Ekkor a bizonyításunk szerint a három „új" egyenes párhuzamos lesz, vagyis egy „ideális" ponton mennek keresztül.

Ha P a háromszög valamelyik csúcsa, akkor a feladat értelmetlen. Ha valamelyik oldalnak a csúcsoktól különböző pontja, akkor az izgonális konjugáltja a szemközti csúcs volna. Minthogy ennek nincs izogonális konjugáltja, ezért a háromszög határának pontjaihoz célszerű nem rendelni izogonális konjugáltat.

16.2. a) és b): az érintő körök középpontjai a szögfelezők metszéspontjai, így izogonális konjugáltjuk természetesen önmaguk.

c) A köré írható kör középpontját az A csúccsal összekötő sugáregyenesnek a szögfelezőre vett tükörképe épp az A-ból induló magasság (l. a **??**. feladatot), tehát a köré írható kör középpontjának a magasságpont az izogonális konjugáltja.

d) A magasságpont konjugáltja ennek megfelelően a köréírható kör középpontja.

16.3. Ha a P pont talpponti háromszögét a P pontból kéteszeresre nagyítjuk, akkor csúcsai éppen a P pontnak a háromszög oldalaira való tükörképei lesznek, tehát a 11.12. feladatban szereplő háromszöget kapjuk, s az ottani megoldás azt adja, hogy az a', b' és c' egyenesek éppen ennek a háromszögnek az oldalfelező merőlegesei, tehát valóban egy ponton mennek keresztül. Ez a pont a P pont izogonális konjugáltja (lásd a 16.1. feladatot).

16.1.

$$\frac{ax}{2R}, \qquad \frac{by}{2R}, \qquad \frac{cz}{2R}.$$

16.2. Lásd [8].

16.4. $\frac{PO}{AO} = \frac{A'M}{AM}$.

16.5. $t\frac{|R^2-\rho^2|}{4R^2}$.

16.2. Megmutatjuk, hogy az S pont izogonális konjugáltja az az A' pont, amelyet úgy kapunk, hogy az A csúcsot tükrözzük a szemközti oldal középpontjára (tehát az az A' pont, amelyre $ABA'C$ négyszög csúcsai ebben a sorrendben paralelogrammát alkotnak). Ez egyenértékű a feladat állításával, hiszen az A' pont rajta van az A-ból induló súlyvonalon, így ennek izogonális konjugáltja, az S pont rajta van az A-ból induló szimediánon.

Legyen az ABC háromszög köréírt kör középpontja K. Tudjuk, hogy a KB sugáregyenesnek az B-ből induló szögfelezőre vonatkozó tükörképe az B-ből induló magasság. A B pontban húzott érintő merőleges a KB sugáregyenesre, tehát a B-ből induló szögfelezőre való tükörképe merőleges a magasságra, azaz párhuzamos a szemközti AC oldallal és természetesen átmegy A-n. Hasonlóan kapjuk, hogy a C pontban húzott érintőnek párhuzamos az AB oldallal és szintén átmegy A-n. E két párhuzamos metszéspontja pedig valóban az A' pont.

Ezt akartuk bizonyítani.

16.3. Tükrözzük az XY szakaszt az A-ból induló szögfelezőre. Az AB oldalon levő X pont X' képe az AC oldalra kerül, az AC oldalon levő Y pont Y' képe pedig az AB oldalra, és $X'Y'$ párhuzamos lesz BC oldallal. A T pont T' képe pontosan akkor felezi az $X'Y'$ szakaszt, ha rajta van a súlyvonalon (l. a **??**. feladatot). A súlyvonalnak a szögfelezőre vett tükörképe a szimedián, tehát T pontosan akkor felezi az XY antiparalelt, ha a szimediánon van.

16.4. Legyen XY az AB-vel antiparalel szakasz, X legyen az AC oldalon fekvő végpontja. Legyen továbbá UV a BC oldallal antiparalel szakasz, U az AC oldalon levő végpontja. Az antiparalel definíciója szerint a $CXY\angle = ABC\angle$ és $VUA\angle = ABC\angle$, márészt $LXU\angle$ szög megegyezik a $CXY\angle$ szöggel, az $LUX\angle$ szög pedig az $VUA\angle$ szöggel. Tehát az LUX háromszög egyenlőszárú, $LU = LX$. Mivel L rajta van a szimediánokon, ezért a 16.3. feladat szerint felezi az antiparaleleket. Tehát az XY és UV antiparalelek egyenlő hosszúak.

Azt kaptuk, hogy az L-en át húzott három antiparalel egyenlő hosszú, és L mindhármat felezi, tehát a három antiparalel hat végpontja egy L középpontú körön van.

16.5. Jelölje L a Lemoine-Grebe pontot, az L-en átmenő, AB-vel párhuzamos egyenes messe U-ban a CB oldalt és V-ben az AC oldalt, az L-en átmenő, AC-vel párhuzamos egyenes messe X-ben a BC oldalt és Y-ban az AB oldalt, végül az L-en átmenő, BC-vel párhuzamos egyenes messe W-ben az AC oldalt és Z-ben az AB oldalt.

Először vegyük észre, hogy $LWCX$ paralelogramma, mert szemközti oldalai párhuzamosak. Tehát átlói felezik egymást. De CL egyenes a C-ből induló szimedián, így WX szakasz antiparalel AB-hez (l. a 16.3. feladatot). De UV párhuzamos az AB oldallal, tehát WX az UVC háromszögben is antiparalel VU-hoz, azaz $UVWX$ húrnégyszög. (Ugyanezt szögekkel is beláthatjuk: $CXW\angle = CAB\angle = CVU\angle$.)

Az $LUBZ$ négyszög is paralelogramma, és BL átlója szimedián, tehát UZ is antiparalel az AC oldalhoz, tehát $BUZ\angle = CAB\angle = WXC\angle$. Ezért a $WXUZ$ trapéz húrtrapéz.

Azt kaptuk, hogy a WXU háromszög köréírt körén rajta van a V és a Z pont is, tehát ez az öt pont egy körön van. Végül az $XUZY$ négyszög ugyanazért húrnégyszög, amiért az $UVWX$ négyszög húrnégyszögnek bizonyult. Tehát Y is rajta van az XUZ háromszög köréírt körén. Így valóban mind a hat pont egy körön van.

16.6.

1. megoldás. A feladat egyszerű következménye a 16.4. feladatnak.

Ugyanúgy kezdjük a megoldást, mint ott: legyen XY az AB-vel antiparalel szakasz, X legyen az AC oldalon fekvő végpontja; legyen továbbá UV a BC oldallal antiparalel szakasz, U az AC oldalon levő végpontja. A 16.4. feladat megoldásában láttuk, hogy e két antiparalel egyenlő hosszú és L, a háromszög Lemoine-Grebe pontja felezi mindkét antiparalelt. Az $XUYV$ négyszög átlói tehát egyenlő hosszúak és felezik egymást, vagyis e négyszög téglalap – éspedig az AC oldal fölé írt téglalap.

Ezzel beláttuk, hogy ha vesszük a háromszög két oldalával antiparalel szakaszt L-en keresztül, ezek végpontjai a harmadik oldal fölé írt téglalapot alkotnak.

2. megoldás. Alkalmazzuk a 16.4. feladat megoldását. Ott láttuk, hogy az L-en átmenő antiparalel szakaszok egyenlők hosszúságúak, tehát átmérői annak az L középpontú körnek, amelynek átmérője akkora, mint az ilyen antiparalelek.

Innen a Thálész-tétel alapján következik a feladat állítása.

16.7. Legyen XY az AB-vel antiparalel szakasz, X legyen az AC oldalon fekvő végpontja. Legyen továbbá UV a BC oldallal antiparalel szakasz, U az AC oldalon levő végpontja. Végül legyen WZ az AC oldallal antiparalel szakasz, amelynek W végpontja van az AB oldalon és Z végpontja a BC oldalon. A 16.6. feladat megoldásában láttuk, hogy az $XUYV$ négyszög az AC oldal fölé írt téglalap. Ugyanígy $YZXW$ a CB oldal fölé írt téglalap és $WVZU$ az AB oldal fölé írt téglalap. Ebből következik, hogy például az UYW háromszög UY, YW, WU oldalai rendre merőlegesek az eredeti háromszög AC, CB, BA oldalára, s így a két háromszög megfelelő szögei megegyeznek. Ezt kellett igazolni.

16.8. Ismét a 16.7. feladat jelöléseit használva az L pont a középpontja a $ZYWX$ téglalapnak, így az L pontnak a $CB = a$ oldaltól vett d_a távolsága éppen a fele a $ZYWX$ téglalap YW oldalának. Ugyanígy az AC oldaltól d_b távolsága egyenlő az UY szakasz felével. Innen az WUY háromszög és az ABC háromszög hasonlósága alapján (l. a 16.7. feladatot) következik, hogy $d_a : d_b = a : b$.

16.10. Messe a C csúcshoz tartozó szimedián a szemközti oldalt a T pontban és legyen T merőleges vetülete a CB oldalon V, a CA oldalon W. A 16.9. feladat szerint $TV : TW = a : b$. Másrészt $TV = BV \sin\beta$ és $TW = CV \sin\alpha$. Innen átszorzással és színusz-tétellel következik a feladat állítása.

16.11. Tekintsük az APB, BPC, CPA háromszögeket! Ezek egyrétűen lefedik a háromszög területét. (Ha P külső pont, akkor előjeles területekkel kell számolnunk.) Másrészt területük kétszerese rendre $c \cdot d_c$, $a \cdot d_a$ és $b \cdot d_b$, ahol d_a, d_b, d_c jelöli a megfelelő oldaltól vett távolságot. Azt kapjuk, hogy

$2T = ad_a + bd_b + cd_c$.

A Cauchy-Schwartz-Bunyakovszkij egyenlőtlenség szerint ez utóbbi összeg $\leq \sqrt{a^2+b^2+c^2} \cdot \sqrt{d_a^2+d_b^2+d_c^2}$. Tehát a távolságok négyzetösszege mindig $\geq 2T/\sqrt{a^2+b^2+c^2}$, ami független a P pont elhelyezkedésétől. Egyenlőség akkor és csak akkor van, ha $d_a : d_b : d_c = a : b : c$.

A Lemoine-Grebe pontra ez teljesül, de nem tudjuk, hogy nem teljesül-e más pontra is. Erre majd a 16.26. feladat ad választ.

16.12. Elég azt belátni, hogy egyetlen ilyen pont van, hiszen a 16.6. feladatban megmutattuk, hogy a Lemoine-Grebe pont megfelelő pont.

Másrészt a 8.2. feladatban láttuk, hogy a háromszög valamelyik oldala fölé írható téglalapok középpontjai az oldalhoz tartozó magasság felezőpontját az oldal felezőpontjával összekötő szakasz pontjai. Két ilyen szakasznak pedig (legfeljebb) egy közös pontja lehet.

16.13.

1. megoldás. A 8.2. feladatban láttuk, hogy az oldalfelező pontot az oldalhoz tartozó magasság felezőpontjával összekötő szakasz éppen az oldal fölé írható téglalapok középpontjainak mértani helye.

Másrészt a 16.6. feladatban láttuk, hogy a Lemoine-Grebe pont egyszerre középpontja mindhárom oldal fölé írt egy-egy téglalapnak, tehát rajta van mindhárom szakaszon. Azt kaptuk, hogy mindhárom szakasz átmegy a háromszög Lemoine-Grebe pontján.

2. megoldás. Tekintsük az ABC háromszög középvonal-háromszögét, melynek csúcsai F_{AB}, F_{AC}, F_{BC}. Az A-ból induló magasság T_A felezőpontja az $AF_{AB}F_{AC}$ háromszög A-ból induló magasságának talppontja. Tükrözzük az $AF_{AB}F_{AC}$ háromszöget $F_{AB}F_{AC}$ felezőpontjára: így épp a középvonal háromszöget kapjuk. Ebből következik, hogy $F_{AB}T_A = T'F_{AC}$, ahol T' a középvonalháromszög F_{BC} csúcsából induló magasság talppontja. A magasságok egy ponton mennek át, így a Ceva-tétel szerint azok a Ceva-szakaszok is egy ponton mennek át, amelyek a háromszög egy-egy csúcsát a szemközti oldalnak azzal a pontjával kötik össze, amelyet úgy kapunk, hogy a magasság talppontját a megfelelő oldal felezőpontjára tükrözünk.

Márpedig ezek a szakaszok éppen a feladatban szereplő szakaszok.

16.14. Ismét a 16.7. feladat jelöléseit használjuk: Legyen XY az AB-vel antiparalel szakasz, X legyen az AC oldalon fekvő végpontja. Legyen továbbá UV a BC oldallal antiparalel szakasz, U az AC oldalon levő végpontja. Végül legyen WZ az AC oldallal antiparalel szakasz, amelynek W végpontja van az AB oldalon és Z végpontja a BC oldalon. A 16.6. feladat megoldásában láttuk, hogy az $XUYV$ négyszög az AC oldal fölé írt téglalap. Ugyanígy $YZXW$ a CB oldal fölé írt téglalap és $WVZU$ az AB oldal fölé írt téglalap, s mindháromnak L, a háromszög Lemoine-Grebe pontja a középpontja. Ezért az L ponthoz tartozó talpponti háromszög három csúcsa az XU, ZY és VW szakaszok felezőpontja, F_{XU}, F_{ZY} és F_{VW}.

Elég belátnunk, hogy az $F_{ZY}L$ egyenes felezi az $F_{XU}F_{VW}$ szakaszt. Azt tudjuk, hogy felezi az XW szakaszt, e szakasszal való metszéspontja tehát F_{XW}. Az $F_{XW}F_{XU}$ szakasz középvonala az XUW háromszögnek, így párhuzamos az UW oldallal és fele olyan hosszú. De akkor párhuzamos és egyenlő hosszú az LF_{VW} szakasszal. Ebből viszont következik, hogy az $F_{XW}F_{XU}LF_{VW}$ négyszög paralelogramma, amelynek LF_{WX} és LF_{VW} átlói felezik egymást.

Tehát az $F_{YZ}L$ egyenes valóban súlyvonala az L pont talpponti háromszögének, és ezt akartuk belátni.

16.15. Legyen az SX'-re X'-ben állított merőleges egyenes metszéspontja az SZ-re Z-ben állított merőleges egyenessel P, az SY-ra Y-ban állított merőleges egyenessel Q. Legyen továbbá az SX-re X-ben állított merőleges egyenes metszéspontja az SZ'-re Z'-ben állított merőleges egyenessel P', az SY'-re Y'-ben állított merőleges egyenessel Q'. Nyilvánvaló, hogy P és P' egymás tükörképe S-re, s ugyanígy Q és Q' is. Ha belátjuk, hogy például $SP = SQ$, akkor ebből következik, hogy a $PQP'Q'$ paralelogramma átlói egyenlők, tehát téglalapról van szó. Ebből szimmetria okokból már a feladat minden állítása következik.

Elég tehát belátni, hogy $SPX'\angle = X'QS\angle$.

Mind Z, mind X' az SP fölötti Thálész-körön van, tehát a kerületi szögek tétele szerint $SPX'\angle = SZX'\angle$. Ugyanígy Y és X' az SQ fölötti Thálész-körön van, tehát $X'QS\angle = X'YS\angle$. Azt kell tehát belátnunk, hogy $SZX'\angle = X'YS\angle$. Most használjuk ki, hogy S az XYZ háromszög súlypontja (eddig nem használtuk!). Ez ugyanis pontosan azt jelenti, hogy az $SX'YS$ négyszög paralelogramma, hiszen az XS egyenes – s így az SX' átló is – felezi az YZ szakaszt, másrészt $2SF_{ZY} = XS = SY'$, hiszen S harmadolja a súlypontot. Az $SX'YS$ paralelogramma szemközti szögei egyenlők, tehát az $SZX'\angle$ szög valóban egyenlő az $X'QS\angle$ szöggel. Ezt akartuk bizonyítani.

Az ábra persze nem mindig ilyen „szép”, de ha a megoldásban szereplő szögeket irányított szögként tekintjük, akkor mindig helyes megoldást kapunk.

16.16. Legyen az S pont talpponti háromszöge XYZ és tegyük fel, hogy S ennek az XYZ háromszögnek a súlypontja. Hajtsuk végre a 16.15. feladatban szereplő tükrözést S-re, majd húzzuk meg a megfelelő csúcsokon át az ott szereplő merőlegeseket. Minden második ilyen merőleges épp a háromszög egy-egy oldalegyenese lesz. A 16.15. feladat szerint azt kapjuk, hogy mind a három oldal fölé írható egy-egy S középpontú téglalap. A 16.12. feladat szerint ebből következik, hogy S a háromszög Lemoine-Grebe pontja.

16.26. A 16.11. feladat szerint pontosan azokra a pontokra minimális a távolságok négyzetösszege, amelyekre igaz, hogy $d_a : d_b : d_c = a : b : c$. A 16.21. feladat szerint ez egyértelműen definiálja a háromszög Lemoine-Grebe pontját.

16.30. A Lemoine-Grebe pont a súlypont izogonális konjugáltja. Utóbbihoz az $m_a : m_b : m_c = = 1/a : 1/b : 1/c$ aránynyhármas tartozik (l. a 16.20. feladatot) , tehát a 16.27. feladat szerint a Lemoine-Grebe ponthoz az $a : b : c$ arányhármas tartozik.

16.31. A **??**. feladat azt állítja, hogy minden, az oldalegyenesek irányától különböző irányhoz tartozó ideális pontnak létezik izogonális konjugáltja és ez az izogonális konjugált a köréírt körön van.

Beláttuk már, hogy minden, nem az oldalegyenesekre illeszkedő pontnak van izogonolási konjugáltja, továbbá azt is, hogy izogonális konjugált izogonális konjugáltja az eredeti pont. Végül láttuk azt is, hogy egy pontnak csakkor ideális pont az izogonális konjugáltja, ha a köréírt körnek a csúcsoktól különböző pontja. Mindebből az állításunk már következik.

16.32. Tudjuk, hogy egy $x : y : z$ arányhármashoz pontosan akkor tartozik ideális pont, ha a reciprokaiból képzett arányhármashoz a köréírt körnek egy, a csúcsoktól különböző pontja tartozik. Ebből viszont a 16.25. feladat szerint már következik a feladat állítása.

16.33. Rögzítsük például a PQR háromszög Q és R pontját és mozgassuk a P pontot a BC oldalon. A PQR feltételezett minimális tulajdonsága szerint a $PQ^2 + PR^2$ négyzetösszeg nő. A **??**. feladat szerint ebből az következik, hogy a P pont a $Q'R'$ szakasz felezőpontja, ahol Q' és R' a Q illetve az R pont merőleges vetülete a BC oldalon. Állítsunk merőlegest a P pontban a BC oldalra és messe ez a merőleges a QR oldalt a T pontban. A PT szakasz a $QQ'R'R$

derékszögű trapéz középvonala, tehát T felezi a QR oldalt. Vagyis PT a PQR háromszög P-hez tartozó súlyvonala.

Ugyanígy kapjuk („a demokrácia szabályai szerint”), hogy a Q-ban az AC-re állított merőleges a Q-hoz tartozó súlyvonal és R-ben az AB-re állított merőleges az R-hez tartozó súlyvonal. A három súlyvonal S közös pontja tehát e merőlegesek közös pontja. Vagyis a PQR háromszög az S súlypontjának talpponti háromszöge. A 16.16. feladatban láttuk, hogy ebből következik, hogy S az ABC háromszög Lemoine-Grebe pontja, a PQR háromszög a Lemoine-Grebe pontjának talpponti háromszöge, ahogy a feladat állítja.

16.3. A négyzet AC és BD átlói a négyzet O középpontjában felezve metszik egymást. A vetítésnél bármely szakasz felezőpontjának képe a végpontok képének felezőpontja. Az O pont e egyenesre vonatkozó E_O merőleges vetülete tehát az E_AE_C szakasznak és az E_BE_D szakasznak is felezőpontja. Csak akkor létezhet megfelelő $ABCD$ négyzet, ha ez a két felezőpont egybeesik.

Állítjuk, hogy ez elégséges is a négyzet létezéséhez. Tekintsük az e egyenesre merőleges f egyenest. Az AC szakasz e-re vonatkozó E_AE_C merőleges vetülete éppen akkora, mint a négyzet AC-re merőleges és AC-vel egyenlő hosszúságú BD átlójának f-re vonatkozó merőleges vetülete. A BD átló e-re és f-re vonatkozó merőleges vetületét is ismerjük, tehát

$$BD^2 = E_AE_C^2 + E_BE_D^2,$$

a négyzet területe pedig ennek az értéknek a fele.

Létezik is a megfelelő négyzet. A fent szerkesztett E_O pont lehet egy ilyen négyzet csúcsa. Állítsunk e-re merőlegeseket az E_A, E_B, E_C, E_D pontokban és E_A-tól és E_C-től mérjük fel ezekre az egyik illetve a másik irányban az $E_OE_B = E_OE_D$ távolság felét, míg E_B-től és E_D-től egymással ellenkező irányokban az $E_OE_A = E_OE_C$ távolság felét. Az így kapott négy pont egy olyan négyszög négy csúcsa, amelynek átlói merőlegesek, egyenlőek és felezik egymást, tehát ez egy négyzet. A szerkesztés révén a négyzet csúcsainak vetületei az e-n előre megadott pontok.

16.4.

1. megoldás. Az AB szakasz F felezőpontjának vetülete e-n az E_AE_B szakasz E_F felezőpontja. Az FC szakasz merőleges vetülete az E_FE_C szakasz. Tekintsük az e-re merőleges f egyenest.

Az AB oldal merőleges az FC magasságra és hossza annak $\frac{2}{\sqrt{3}}$-szöröse, így AB vetülete az e-re merőleges f-re az E_FE_C szakasz hosszának $\frac{2}{\sqrt{3}}$-szöröse. AB előállítható az egymásra merőleges vetületeiből:

$$AB^2 = E_AE_B^2 + \frac{4}{3}E_FE_C^2.$$

Ha E_A, E_B, E_C rendre az e egyeneshez rögzített számegyenes a, b, c számainak felelnek meg, akkor E_F az $\frac{a+b}{2}$-nek felel meg és így

$$AB^2 = (b-a)^2 + \frac{4}{3}\frac{2c-a-b}{2}^2 = \frac{4}{3}(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca).$$

A terület ennek az értéknek a $\frac{\sqrt{3}}{4}$-szerese:

$$T = \frac{\sqrt{3}}{3}(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca).$$

A szabályos háromszög minden esetben létezik ($E_A = E_B = E_C$ esetén ponttá fajul). Konstruálhatunk egy olyan szabályos háromszöget, amelyben az AB oldal felezőpontja E_F, az E_AE_B szakasz felezőpontja. Az A, B csúcsokat úgy kapjuk meg, hogy E_A-ból és E_B-ből e-re merőlegesen ellentétes irányban felmérjük az $\frac{1}{\sqrt{3}}E_FE_C$ távolságot. A fenti gondolatmenet alapján ez a távolság épp megfelelő ahhoz, hogy az $F = E_F$ pontban AB-re állított merőlegest az e-re E_C-ben állított merőleges F-től épp $\frac{\sqrt{3}}{2}$ távolságra messe, ami szükséges és elégséges ahhoz, hogy ABC olyan szabályos háromszög legyen, amelynek vetülete $E_AE_BE_C$.

2. megoldás. b) Ha ABC egy megfelelő szabályos háromszög, akkor annak az e egyenesre való tükörképe is megfelelő. Tegyük most fel, hogy ABC pozitív körüljárású, tehát az $\overrightarrow{AB}$ vektor $+60°$-os elforgatottja az $\overrightarrow{AC}$ vektor. Tehát, ha e-t számegyenesnek tekintjük és $\overrightarrow{AB}$-nek a számegyenes pozitív irányával bezárt szöge α és $AB = BC = CA = x$, akkor

$$\left.\begin{aligned} x\cos\alpha &= b - a \\ x\cos(\alpha + 60°) &= c - a \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Fejtsük ki a fenti második egyenletet az addíciós tétel szerint!

$$\frac{1}{2}x\cos\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}x\sin\alpha = c - a$$

, azaz átrendezve és (1) első egyenletét használva

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}x\sin\alpha = c - a - \frac{1}{2}(b - a).$$

Négyzetreemelés utánalkalmazható a $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$ azonosság:

$$\frac{3}{4}x^2(1 - \cos^2\alpha) = \left(\frac{2c - b - a}{2}\right)^2,$$

és itt (1) első egyenletét újra használhatjuk:

$$\frac{3}{4}x^2 = \left(\frac{2c - b - a}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}(b - a)^2.$$

Ebből az ABC szabályos háromszög területe:

$$T = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 = \frac{\sqrt{3}}{3}(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca).$$

16.5. a) Ha van ilyen szabályos háromszög, akkor az e egyenesre vonatkozó tükörképe is megfelelő. A továbbiakban ezért feltesszük, hogy az ABC háromszög negatív körüljárású. Ebben az esetben az $ABC\sphericalangle$, $BCA\sphericalangle$, $CAB\sphericalangle$ irányított szögek mind $+60°$-kal egyenlők, így az $E_{AB}BE_{BC}\sphericalangle$, $E_{BC}CE_{CA}\sphericalangle$, $E_{CA}AE_{AB}\sphericalangle$ irányított szögek is mind $+60°$-osak.

Legyen k_B és k_A az $E_{AB}E_{BC}$, illetve az $E_{CA}E_{AB}$ pontpár $+60°$-os látóköre! (A PQ pontpár α szögű látóköre azon R pontokból áll, amelyekre $PRQ\sphericalangle \equiv \alpha \pmod{180°}$.) Az 1 alábbi ábrán feltüntettük a $E_{BC}E_{CA}$ pontpár $+60°$-os k_C látókörét is, de ennek nincs szerepe a szerkesztésben.

Ha B a k_B kör tetszőleges pontja, akkor legyen a BE_{AB} egyenes és a k_A kör E_{AB}-tól különböző metszéspontja A (illetve $A = E_{AB}$, ha az egyenes ott érinti a k_A kört) és legyen az AE_{CA}, BE_{BC} egyenesek metszéspontja C. Ezekkel a választásokkal

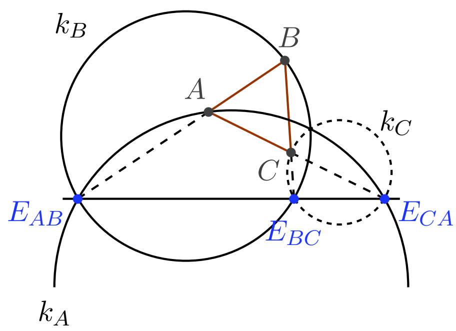
$$ABC\sphericalangle \equiv E_{AB}BE_{BC}\sphericalangle \equiv -60° \pmod{180°}, \qquad CAB\sphericalangle \equiv -60° \pmod{180°}, \tag{1}$$

azaz az ABC háromszög szabályos és megfelelő oldalegyenesei átmennek a megadott pontokon.

A B pontot a k_B körön tetszőlegesen választottuk, így végtelen sok megoldás van.

b) A B pont k_B körön való mozgatása közben az AB szakasz hossza is változik, a háromszög területe sem rögzített.

Megjegyzés Könnyű megmutatni, hogy a fent szerkeszett C pontra $C \in k_C$.



16.5M.1. ábra.

16.7. a) A B csúcs rajta van az $E_{AB}E_{BC}$ szakasz k_B Thalesz körén, míg D az $E_{CD}E_{DA}$ szakasz k_D Thalesz körére illeszkedik. A BD átló felezi a négyzet $ABC\angle$, $CDA\angle$ szögeit, így a BD egyenes felezi a két Thalesz kör egyik $E_{CD}E_{DA}$ ívét illetve egyik $E_{AB}E_{BC}$ ívét. Legyen ez a felezőpont k_B-n F_B, k_D-n pedig F_D.

Most fordítsuk meg az ábra konstrukcióját! A k_B, k_D körök e egyenes által levágott ívei megfelezhetők, tehát az F_B, F_D pontok adottnak tekinthetők. A két felezőpont választására két-két, összesen tehát négyféle lehetőség van, de ezek közül ketten-ketten egymás tükörképei e-re, csak két lényegesen különböző eset van. Később látni fogjuk, hogy ezek közül pontosan az egyik megfelelő.

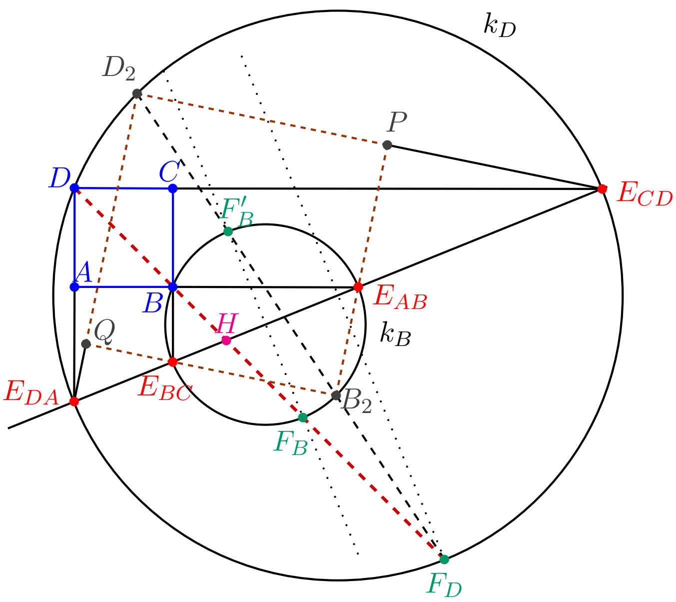
Az F_B, F_D pontok ismeretében szerkeszthető az F_DF_B egyenes is és ez kimetszi a k_B, k_D körökből a B, D pontokat. Ezekben a pontokban megszerkeszthetünk két-két, a $BD = F_BF_D$ egyenessel 45°-os szöget bezáró egyenest. Az így kapott négy egyenes négyzetet alkot, mert a szögek miatt olyan téglalap jön létre, amelynek egyik átlója szimmetriatengely. A szerkesztés biztosítja, hogy a négyzet oldalegyenesei a megadott négy ponton menjenek át, mégis adódik egy probléma. A négyzet csúcsait nem mindig lehet megbetűzni úgy, hogy megfelelјen az e egyenesen adott négy pont indexelésének. A mellékelt ábrán az F_D, F'_B ívfelező pontokból kiindulva kapott B_1PD_1Q négyzet P, Q csúcsait nem tudjuk jól megbetűzni A-val és C-vel. A D_2E_{DA}, B_2E_{AB} „oldalegyenesek” párhuzamosak lettek, nem lehet mindkettőn rajta az A csúcs.

Vegyük észre, hogy a körök ívfelező pontjait összekötő egyenes és az e centrális metszéspontja a k_B, k_D körök hasonlósági pontja. A két ívfelezőpont kétféle (nem tengelyesen tükrös) választása elvezet a két kör két különböző hasonlósági pontjának megtalálásához. Ha az e azonos oldalán található felezőpontokat kötjük össze, akkor azt a hasonlósági pontot kapjuk meg, amelyből pozitív arányú középpontos hasonlóság viszi az egyik kört a másikba, míg az egymással ellenkező oldali felezőpontok összekötésével azt a centrumot kapjuk meg, amelyből negatív arányú középpontos hasonlóság viszi egymásba a két kört.

A létező négyzet BD átlóegyenesének és az e egyenes H metszéspontjára vonatkozó megfelelő nagyításkor a k_B kör k_D-be képződik, ugyanakkor az AB egyenes a vele párhuzamos CD egyenesbe, míg BC a vele párhuzamos DA egyenesbe megy át. Az e egyenesen pedig E_{AB} képe E_{CD} lesz és E_{BC} képe E_{DA}. A nagyítás előjele az e egyenesen eldől. Ha az $\overrightarrow{E_{AB}E_{BC}}$, $\overrightarrow{E_{CD}E_{DA}}$ vektorok azonos irányításúak, akkor pozitív arányú nagyításra van szükség, tehát az e ugyanazon oldalán elhelyezkedő ívfelező pontokat kell összekötni, míg ha a két vektor irányítása ellenkező, akkor a megfelelő nagyítás aránya negatív, tehát az e egymással ellenkező oldalain elhelyezkedő ívfelező pontokat kell összekötni.

Ha így járunk el, akkor nincs gond a csúcsok elnevezésével: az E_{DA}, E_{AB} pontok nem egymás képei a szerkesztett ábrához tartozó nagyításnál, így a DE_{DA}, BE_{AB} egyenesek sem párhuzamosak, hanem metszők, metszéspontjuk A míg a négyzet negyedik csúcsa D.

Természetesen speciális esetekben a szerkesztést kissé módosítani kell. Előfordulhat pl, hogy...



16.7M.1. ábra.

b) Jelölje az AB és az e egyenes szögét α, a négyzet oldalát x. Így $E_{DA}E_{BC}\cos\alpha = x$, míg $E_{AB}E_{CD}\sin\alpha = x$, így

$$1 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = \frac{x^2}{E_{DA}E_{BC}^2} + \frac{x^2}{E_{AB}E_{CD}^2},$$

amiből

$$x^2 = \frac{E_{DA}E_{BC}^2 \cdot E_{AB}E_{CD}^2}{E_{DA}E_{BC}^2 + E_{AB}E_{CD}^2}.$$

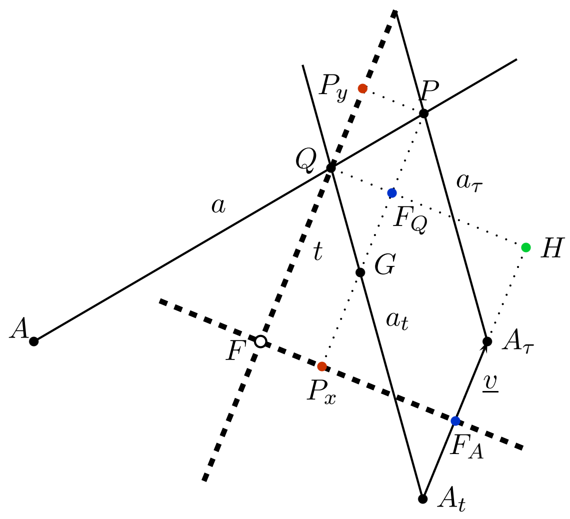
16.1. Jelölje az A pont illetve a rá illeszkedő a egyenes t tengelyre vonatkozó tükörképét A_t illetve a_t, ezek $\underline{v}$ vektorral való eltoltját A_τ illetve a_τ. Tehát A_τ illetve a_τ az A pont illetve a egyenes képe a t tengelyes tükrözés és $\underline{v}$ vektorral való eltolás kompozíciójából álló τ csúsztatva tükrözésnél (lásd az 1. ábrát).

Az AA_tA_τ háromszög A_t-nél derékszögű, így az A_tA_τ szakasz felezőmerőlegese – a háromszög középvonala – az AA_τ oldalt annak F felezőpontjában metszi. Ezen a ponton halad át a csúsztatva tükrözés t tengelye is.

Abban a koordinátarendszerben dolgozunk, amelynek origója F, y-tengelye a t tükrözési tengely, x-tengelye az említett felezőmerőleges és pozitív síknegyede az A_τ pontot tartalmazó – az A pontot tartalmazóval átellenes – rész. Legyen a vizsgált $P = a \cap a_\tau$ pont vetülete a koordinátatengelyekre P_x illetve P_y és jelölje a PP_x, a_t egyenesek metszéspontját G, míg a és t metszetét Q és jelöljük be a Q-ból az y tengelyre merőleges egyenes PP_x-szel vett F_Q és A_tA_τ-val vett H metszéspontját.

Mivel a és a_t egymás tükörképei t-re és PG párhuzamos t-vel, így a PQG háromszög egyenlő szárú, tehát F_Q felezi a PG szakaszt. Az $A_tA_\tau PG$ paralelogramma $|\underline{v}|$-vel egyenlő A_tA_τ, PG oldalai hosszának felét jelölje c, tehát $c = A_tF_A = GF_Q = F_QP$. A QF_QG, QHA_t háromszögek hasonlóak, tehát

$$\frac{QF_Q}{F_QG} = \frac{QH}{HA_t}, \tag{1}$$



16.1M.1. ábra.

ahol $QF_Q = FP_x = x$, $F_QG = c$, $QH = FF_A$ és $HA_t = PP_x = FP_y = y$, azaz a törtektől megszabadulva: $xy = c \cdot FF_A$, vagy még egyszerűbben:

$$xy = \frac{T}{2}, \tag{2}$$

ahol T az AA_tA_τ háromszög területét jelöli.

A (2) összefüggés egy olyan derékszögű hiperbola egyenlete, amelyre az A, A_τ pontok is illeszkednek és amelynek aszimptotái a t, FF_A koordinátatengelyek.

Most megmutatjuk, hogy ennek a hiperbolának minden pontja rajta van az előírt ($A \in a$, $a \cap \cap a_\tau$) ponthalmazon. A_τ rajta van, hiszen az $a = AA_\tau$ választással $A_\tau = a \cap a_\tau$. A is rajta van, hiszen az $a = A\tau^{-1}(A)$ egyenessel $A = a \cap a_\tau$.

Tekintsük a t tengely, az A pont valamint a $\underline{v}$ vektor által a fenti módon meghatározott derékszögű koordinátarendszert, tehát legyen az y tengely a t tükörtengely az x-tengely pedig az A_tA_τ szakasz felezőmerőlegese és legyen a pozitív síknegyed az A_τ-t tartalmazó. Tekintsük a sík egy tetszőleges – de A-tól és A_τ-tól különböző P pontját, melynek koordinátáira $xy = \frac{T}{2}$.

Jelölje továbbra is P-nek a koordinátatengelyekre eső vetületeit P_x és P_y, a $PA = a$ egyenes és t metszéspontját Q, a PP_x egyenes metszéspontját a $QA_t = a_t$ egyenessel illetve a Q-ból az y-tengelyre állított merőlegessel G és F_Q, és legyen QF_Q és A_tA_τ metszéspontja H.

Az a_t egyenes továbbra is a tükörképe t-re, hiszen $A \in a$ tükörképe A_t, míg $Q \in a$ tükörképe $Q \in a_t$ és két pont meghatározza az egyenest. Emiatt PQG továbbra is egyenlő szárú, F_Q most is felezi a PG szakaszt. Legyen $GF_Q = F_QP = c_2$, míg $A_tF_A = F_AA_\tau = c_1$.

A GQF_Q, A_tQH háromszögek itt is hasonlóak, így most is felírható a (1) összefüggés, és most is teljesülnek a $QF_Q = x$m $QH = FF_A$ összefüggések, de ebben az esetben $F_QG = c_2$ és $HA_t = = PP_x + F_AA_t - PF_Q = y + c_1 - c_2$, így ha most (1)-ben megszabadulunk a tötektől, akkor a $xy + x(c_1 - c_2) = c_2FF_A$, összefüggéshez jutunk, amit célszerűbb az alábbi formába írni:

$$xy - c_1FF_A = (c_2 - c_1)(FF_A + x). \tag{3}$$

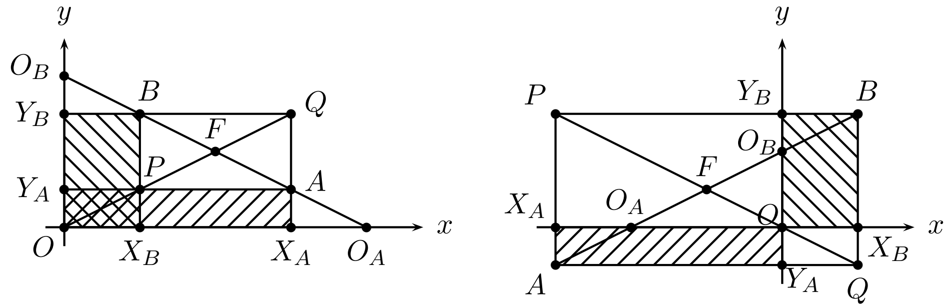
Itt az egyenlet bal oldalán zérus szerepel, hiszen P illeszkedik a (2) egyenletű görbére, tehát a jobb oldalon is nulla áll: $c_1 = c_2$. Ez azt jelenti, hogy az $A_tA_\tau PG$ négyszög paralelogramma, tehát a PA_τ egyenes valóban az a egyenes képe a τ csúsztatva tükrözésnél.

Megjegyzés

Ha τ transzformációnk tengelyes tükrözés, amelynek t tengelyére nem illeszkedik az A pont, akkor a megoldáshalmaz a t tengely és az A pontból a tengelyre állított u merőleges egyenesnek az uniójából áll. Valóban, a t-vel nem párhuzamos és arra nem is merőleges a egyenes és $\tau(a)$ képe a tengelyen metszik egymást és a tengely tetszőleges P pontja esetén a-t a PA egyenesnek választva ez a metszépont éppen P, míg $a = u$ esetén $a = \tau(a)$ tehát az egyenes és a képe egybeesik, közös részük a teljes egyenes.

A $t \cup u$ merőleges egyenespár egy elfajult merőleges szárú hiperbolának is felfogható, a későbbiekben nem mindig tekintjük a csúsztatva tükrözéstől különböző esetnek, hanem csak egy elfajulásnak.

16.2. Legyen a középpont O, a hiperbola két pontja A és B. Induljunk ki a kész 1. ábrából! A hiperbola középpontját jelölje O, aszimptotái legyenek az x, y tengelyek és húzzunk párhuzamosokat ezekkel az A, B pontokon át: a párhuzamosok egymással való metszéspontja P és Q, az aszimptotákkal való metszéspontja értelemszerűen X_A, X_B, Y_A, Y_B.



16.2M.1. ábra.

Az A és B pontok pontosan vannak rajta az x, y aszimptotákkal rendelkező ugyanazon hiperbolán, ha azonos vagy ellenkező síknegyedben vannak és az OX_BBY_B, OX_AAY_A téglalapok területe egyenlő egymással, vagy ami ugyanaz: a PBY_BY_A, PX_BX_AA téglalapok egyenlő területűek. Az 1.8. feladat állítása szerint ezek az egyenlőségek pontosan akkor teljesülnek, ha az O, P, Q pontok egy egyenesen vannak. Az $AQBP$ paralelogramma F középpontja a PQ, AB szakaszok metszéspontja, egyben felezőpontja, így a területek egyenlősége azzal ekvivalens, hogy az OP egyenes megfelezi átmegy az AB szakasz F felezőpontján.

Ha adott a hiperbola A és B pontja és az A-val átellenes pontja, akkor az O középpont is adott, az AB szakasz F felezőpontja is rögzített. Az O_AOO_B derékszögű háromszögek F-ből egymásba nagyíthatók, tehát F az utóbbi háromszögben is a körülírt kör középpontja. Az F középpontú FO sugarú kör kimetszi az AB egyenesből az aszimptoták O_A, O_B metszéspontjait, ezek egyértelműen megadják a hiperbolát. Az F-re vonatkozó tükrözéssel illetve nagyítással létrehozhatók az 1.8. feladatnak megfelelő paralelogrammák (téglalapok) és megmutatható, hogy egyenlő területek jönnek létre, a hiperbola megfelelő lesz.

16.4. Eredmények: **a)** a QAQ' háromszög körülírt köre; **b)** derékszögű hiperbola, melynek centruma a QQ' szakasz felezőpontja és átmegy a Q, Q', A pontokon.

Tekintsük a 16.4S. Segítségben megadott τ transzformációt. A P pont akkor és csakis akkor felel meg a feladat követelményeinek, ha a QA, QP egyenesek irányatott szöge

a) megegyezik; **b)** ellentétes

a $Q'A$, $Q'P$ egyenesek irányított szögével, azaz ha a τ transzformációnál QP képe $Q'P$. Ezért az a) esetben az 5.6. feladat, míg a b) esetben a 16.1. feladat alkalmazható.

16.5. b) Jelölje t az AB szakasz F felezőpontján átmenő, az előre rögzíett egyenessel párhuzamos egyenest. Tekintsük azt a τ csúsztatva tükrözést, amelynek tengelye t, és amely az A pontot B-

be képezi. A C pont akkor és csakis akkor tartozik hozzá a mértani helyhez, ha az AC egyenes τ-nál származó képe megegyezik a BC egyenessel, így alkalmazható a 16.1. feladat eredménye. A keresett mértani hely egy olyan derékszögű hiperbola, amelynek centruma F, egyik aszimptotája párhuzamos az adott egyenessel és átmegy az A, B pontokon.

16.6. Ez a feltétel pontosan akkor teljesül, ha $AQP\sphericalangle \equiv PQ'A\sphericalangle \pmod{180°}$, így a feladat ekvivalens a 16.4. példa b) részével. A keresett mértani hely egy derékszögű hiperbola, amelynek középpontja a QQ' szakasz felezőpontja és átmegy a Q, Q', A pontokon.

16.7. A P pont természetesen lehet az AQQ' háromszög körülírt körén. Ha nem ott van, akkor az $AQ'P$ háromszög körülírt köre az AQP háromszög körüülírt körének AP egyenesre tükrözött képe, tehát ebben az esetben a 16.6. feladatról van szó. A keresett mértani hely egy kör és egy derékszögű hiperbola uniója.

16.8. Lemma: Az A, B, C, C' pontok akkor és csakis akkor illeszkednek egy olyan derékszögű hiperbolára, amelynek középpontja a CC' szakasz felezőpontja, ha az ABC, ABC' háromszögek körülírt köre egymás tükörképe az AB egyenesre vonatkozólag.

A Lemma bizonyítása: A 16.2. feladat szerint pontosan egy olyan derékszögű hiperbola van, amely átmegy az előre adott A, C és C' pontokon és az utóbbi kettő a hiperbola középpontjára szimmetrikusan helyezkedik el. Ez a hiperbola a 16.6.–16.7. feladatok segítségével is értelmezhető, a B pont akkor és csakis akkor illeszkedik rá, ha az ABC, ABC' háromszögek körülírt köre egymás tükörképe az AB egyenesre vonatkozólag.

a) A Lemma alapján a feladat is röviden megoldható: a C' pont akkor és csakis akkor megfelelő, ha illeszkedik az ABC háromszög körülírt körének AB egyenesre tükrözött képére.

b) A hiperbola középpontja a CC' szakasz felezőpontja, tehát a középpont mértani helye az előbbi kör C-ből felére kicsinyített képe, azaz az ABC háromszög Feuerbach köre.

16.9. a 16.8. feladat a) része szerint az A, B, C pontokon átmenő hiperbolákon a C-vel átellenes C' pont az ABC háromszög k köréírt körének AB egyenesre tükrözött k_C képén van. Tekintsük még a k kör AC-re vonatkozó k_B tükörképét is. Ismeretes (6.2. feladat), hogy a háromszög M magasságpontjának az oldalegyeneskre vonatkozó tükörképei illeszkednek a háromszög körülírt körére, azaz a körülírt körnek az oldalegyenesekre tükrözött képei, pl k_C és k_B, átmennek M-en.

Ha $C' \in k_C$ tetszőleges pont, akkor a 16.2. feladat eredménye szerint C', C és A egyértelműen meghatározza a rajtuk átmenő és CC' felezőpontjára szimmetrikus hiperbolát. Erre pontosan akkor illeszkedik M (lásd a 16.6. feladatot), ha az AMC háromszög körülírt köre – azaz k_B – és az AMC' háromszög körülírt köre – azaz k_C – egymás tükörképei az AM közös húrjuk egyenesére vonatkozóan. Ez teljesül, hiszen két azonos sugarú különböző kört a közös húrjuk egyenesére vonatkozó tükrözés egymásba képez és k_B és k_C azonos sugarúak és különbözők, hiszen ők a k kör különböző tengelyre tükrözött képei.

16.10. Eredmény: egy-egy kör a megoldás, az A, B pontpár egy-egy látóköre. Az egyes esetekben a megfelelő irányított szögekkel

$$\textbf{a)}\, A'C'B'\sphericalangle \equiv A'CB'\sphericalangle \equiv ACB\sphericalangle \pmod{180°},$$

$$\textbf{b)}\, A'C'B'\sphericalangle \equiv -A'CB'\sphericalangle \equiv -ACB\sphericalangle \pmod{180°},$$

tehát az a) esetben az ABC háromszög körülírt köréről van szó, a b)-ben pedig ennek az AB egyenesre vonatkozó tükörképéről.

16.11. M jelöli az ABC háromszög magasságpontját. Az alábbi fejtegetés első részében azonban nem fontos, hogy M a magasságpont.

Ha adottak az A, M, A', M' pontok ahol az AM, $A'M'$ szakaszok egyenlő hosszúak, akkor csak egyetlen olyan irányításváltó egybevágósági transzformáció van, amely A-t az A'-be és egyúttal M-et az M'-be viszi.

Ha ellenben az M, A, M' pontok mellett csak az $A'M'$ szakasz egyenese adott, akkor két ilyen irányításváltó transzformáció van aszerint, hogy A' az M'-től az egyenesükön melyik irányban áll. Ha az egyik transzformáció adott, akkor a másikat ebből úgy kapjuk, hogy végrehajtunk még egy A-ra vonatkozó középpontos tükrözést is.

Tekintsük az ABM háromszöget és az összes olyan vele egybevágó, de ellenkező körüljárású $A'B'M'$ háromszöget, amelyre $AM \cap A'M' = A$, $BM \cap B'M' = B$. Az ilyen M' pontok mértani helye az ABM háromszög körülírt körének AB egyenesre vonatkozó tükörképe (lásd a 16.10. feladatot), azaz az ABC háromszög körülírt köre (ismeretes, hogy az M magaságpontnak a háromszög AB oldalára vonatkozó tükörképe a háromszög körülírt körén van).

Tekintsük most az ACM háromszöget is és az összes olyan vele egybevágó, de ellenkező körüljárású $A'C'M'$ háromszöget is, amelyre $AM \cap A'M' = A$, $CM \cap C'M' = C$. Az ilyen M' pontok mértani helye is az ABC háromszög körülírt köre.

A két esetben tehát a mértani hely ugyanaz és a korábbiak szerint, hogy ha rögzítjük az M' pontot a körülírt körön és azt is, hogy az A' pont z $M'A$ egyenesen milyen irányban legyen M'-től, akkor a két transzformáció is ugyanaz.. Ez azt jelenti, hogy ennél az irányításváltó transzfomációnál az $ABCM$ pontnégyes egybevágó módon képződik az $A'B'C'M'$ pontnégyesbe. Ez az $A'B'C'M'$ pontnégyes tehát rendelkezik a kívánt tulajdonságokkal.

16.12. Tekintsük az M' ponthoz a 16.11. feladatban konstruált $A'B'C'$ háromszöget és azt a τ irányításváltó egybevágóságot, amely az $A'B'C'M'$ pontnégyest az $ABCM$ pontnégyesbe viszi. A τ transzformáció egy csúsztatva tükrözés, elfajult esetben egyszerű tengelyes tükrözés. A 16.1. feladat és az utána írt megjegyzés szerint ilyenkor az M pontnon átmenő m egyenes és a $\tau(m) = m'$ egyenes közös része merőleges szárú hiperbolát vagy egy merőleges egyenespárt ír le aszerint, hogy τ valódi csúsztatva tükrözés vagy „csak” tengelyes tükrözés. A 16.11. feladat konstrukciója szerint most ezen metszéspontok között vannak a háromszög csúcsai és az M, M' alappontok is. A 16.12. feladat állítását beláttuk.

Megjegyzés

Akkor fajul merőleges egyenespárra a megoldáshalmaz, ha az ábrához tartozó τ transzformáció tengelyes tükrözés. Ennek t tengelye az MM' szakasz felezőmerőlegese, és ekkor a 16.1. feladatnak illetve az utána található megjegyzésnek megfelelő megoldáshalmaz a t tengelyből és az $MM' = u$ egyenesből áll. Ez az egyenespár akkor tartalmazhatja az ABC háromszög mindegyik csúcsát, ha a csúcsok közül legalább egy az $MM' = u$ egyenesen van. Ilyenkor u a háromszög magasságvonala és egy jól ismert helyzethez jutunk el: ha a magasságpontot tükrözzük a háromszög bármelyik oldalára, akkor a körülírt kör egy M' pontját kapjuk. Ebben a szituában a 16.11. feladatnak megfelelő $A'B'C'M'$ pontnégyes valóban az $ABCM$ pontnégyesnek az oldalegyenesre vonatkozó tükörképe és a 16.12. feladatnak megfelelő mértani hely az említett oldalegyenesből és a rá merőleges magasságvonal egyeneséből áll.

16.13. Ha a négy pont ortogonális pontnégyest alkot (egy háromszög három csúcsa és a magasságpontja), akkor végtelen sok megfelelő hiperbola van (lásd a **??**. –16.9. feladatokat), egyébként azonban a hiperbola egyértelmű – de lehet elfajult, azaz merőleges egyenespár.

Jelölje a négy pontot A, B, C és D, az ABC háromszög körülírt körét k, magasságpontját M, a CDM háromszög körülírt körét m, annak CD egyenesre tükrözött képét c', a c', k körök C-től különböző metszéspontját M'. Megmutatható, hogy a 16.11., 16.12. feladatoknak megfelelő hiperbola átmegy az A, B, C (és M, M') pontokon kívül D-n is.

17. Vegyes feladatok

17.22. Lásd Kömal Gy.2914, 1994/12, 493. oldal [12].

17.24. Lásd Kömal Gy.2730, 1992/11, 377-378. oldal [12].

17.27. Legyen O_B és O_C merőleges vetülete a BC oldalegyenesen V_B és V_C. Az állításunk egyenértékű azzal, hogy GF_{BC} a középvonala a $V_BO_BO_CV_C$ derékszögű trapéznak. Mivel GF_{BC} merőleges a BC oldalra, ehhez elég meggondolni, hogy F_{BC} felezi a V_BV_C szakaszt. Ez viszont következik abból, hogy $BV_B = CV_C$, mert mindkét szakasz félkerület hosszúságú.

17.28. Ismeretes, hogy H éppen a köréírt kör A-t nem tartalmazó BC ívének felezőpontja.

Azt kell bizonyítani, hogy $r_A - r = 2F_{BC}H$ (itt r_A az a-hoz írt kör sugarát, r a beírt kör sugarát jelöli).

Jelölje O a beírt kör középpontját, O_A az a oldalhoz írt kör középpontját, az előbbi merőleges vetületét a BC oldalon V_O, az utóbbiét V_A. Ismeretes, hogy e két pont szimmetrikus a BC oldal felezőpontjára, másrészt H rajta van az A-nál levő szög belső szögfelezőjén, tehát az $OV_OV_AO_A$ derékszögű „hurkolt” trapézban az $F_{BC}H$ szakasz középvonal. Így kétszerese egyenlő a két párhuzamos oldal különbségével, ami éppen $O_AV_A - OV_O = r_A - r$.

Ezt akartuk bizonyítani.

17.30.

1. megoldás. A 17.27. feladatból következik, hogy a három hozzáírt kör sugarának összege egyenlő $3R + L$, ahol L a K középpontnak az oldalaktól vett távolságai összegét jelöli. Ugyanis az ott szereplő GF_{BC} szakasz hossza éppen $R + d_1$, ahol d_1 a K pontnak a BC oldaltól vett – előjeles – távolsága. (Az előjeles távolság azt jelenti, hogy ha egy oldal elválasztja egymástól a szemközti csúcsot és a köréírt kör középpontjét, akkor a középpontnak az oldaltól vett távolsága negatív.) Ha a feladat eredményét mindhárom oldalra alkalmazzuk, épp a mondott egyenlőséget kapjuk.

Másrészt a 17.29. feladat szerint a hozzáírt körök sugarainak összege $4R + r$. E két eredményt összevetve éppen a feladat állítását nyerjük.

2. megoldás. A feladat bizonyítható a Ptolemaiosz-tétel segítségével is.

Szokás szerint F_{XY}-nal jelöljük az XY szakasz felezőpontját és K-val a köréírt kör középpontját. Az $AF_{AB}KF_{AC}$ négyszög húrnégyszög, hiszen két szembenlevő csúcsánál (a két oldalfelező pontnál) derékszög van. Ptolemaiosz tétele szerint az átlók szorzata egyenlő a szemközti oldalak szorzatának összegével. Az egyik átló, $AK = R$, a köréírt kör sugara, a másik átló középvonal, tehát $a/2$ hosszúságú. Másrészt $KF_{AB} = d_3$ és $KF_{AC} = d_2$, tehát – mindkét oldalt kettővel szorozva – a Ptolemaiosz-tételből azt kapjuk, hogy

$Ra = bd_3 + cd_2$.

Ugyanígy kapjuk azt is, hogy

$Rb = ad_3 + cd_1$

és

$Rc = ad_2 + bd_1$.

Végül felírjuk kétféleképpen a háromszög területének kétszeresét. Egyrészt a kétszeres terület egyenlő $r(a + b + c)$-vel, másrészt az ABK, BKC, CKA háromszögek kétszeres területének összegével, azaz $ad_1 + bd_2 + cd_3$-mal. Ebből kapjuk, hogy

$r(a + b + c) = ad_1 + bd_2 + cd_3$.

A négy kiemelt egyenlőséget összeadva azt kapjuk, hogy

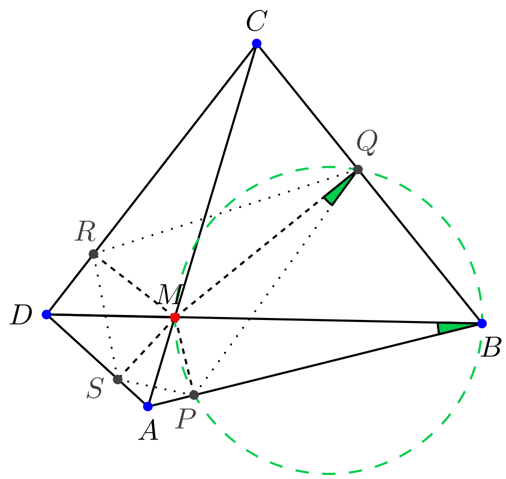
$(R + r)(a + b + c) = L(a + b + c)$.

Ebből a kerülettel való osztás után éppen a kívánt állítást ($L = R + r$-et) kapjuk.

Megjegyzés. Tompaszögű háromszögre is megy a bizonyítás, de a mind a K pont távolságát az oldalaktól, mind a háromszögek területét előjelesen kell érteni, másrészt a húrnégyszögeknél az átlók és oldalak szerepe módosul.

17.31. A 9.5. feladat megoldásában láttuk, hogy az oldalak négyzetösszege egyenlő $9R^2-KM^2$-tel, ahol K a köréírt kör középpontja, M pedig a magasságpont. Mármost a magasságpont aszerint van a háromszög köréírt körön belül, annak határán, vagy a köréírt körön kívül, hogy a háromszög hegyes-, derék- vagy tompaszögű. Másrészt KM éppen eszerint kisebb, egyenlő vagy nagyobb R-nél. Ebből a feladat állítása következik.

17.32. Legyen M vetülete az AB, BC, CD, DA oldalon rendre P, Q, R, S. A $BPMQ$ négyszög húrnégyszög (P és Q a BM fölötti Thálész-körön van). Ezért $MBP\angle = MQP\angle$ (lásd az 1. ábrát). Ugyanígy (a „demokrácia szabályai” szerint) kapjuk, hogy $MCR\angle = MQR\angle$.



17.32M.1. ábra.

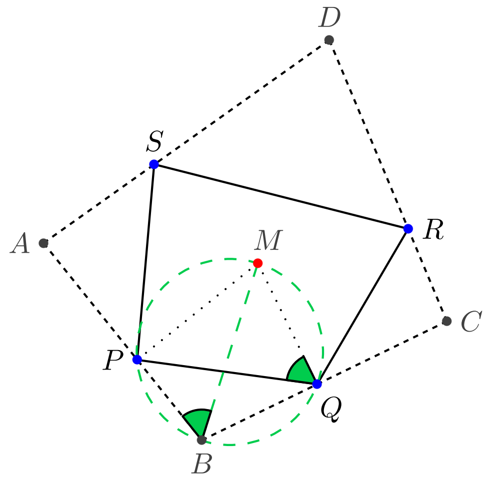
Eddig azt használtuk, hogy M merőleges vetületeiről van szó. Most kihasználjuk, hogy M az átlók metszéspontja, tehát $MBP\angle = DBA\angle$ és $MCR\angle = ACD\angle$. De $ABCD$ húrnégyszög, tehát $ACD\angle = ABD\angle$.

Azt kaptuk, hogy MQ felezi a Q-nál levő szöget. Ugyanígy (a „demokrácia szabályai szerint” MP, MR és MS is felezi a P, R, S-nél levő szöget. Tehát M egyenlő távol van a $PQRS$ négyszög mind a négy oldalától, azaz e négyszögbe kör írható, amelynek középpontja M.

17.33. A következő jelöléseket használjuk: legyen A a P-n és S-en átmenő külső szögfelező metszéspontja, B a Q-n és P-n átmenő külső szögfelezők metszéspontja, C az R-en és Q-n átmenő, D pedig az R-en és S-en átmenő külső szögfelezőké. Legyen továbbá a P csúcsnál és a Q csúcsnál levő belső szögfelezők metszéspontja M (lásd az 1. ábrát).

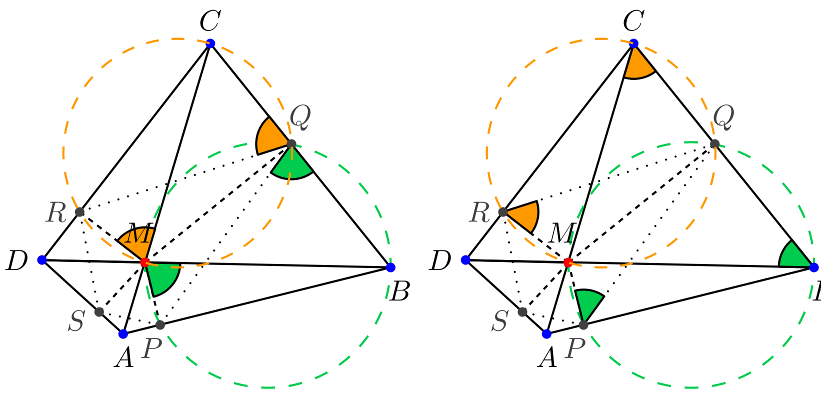
$BPMQ$ húrnégyszög (mert azonos csúcson átmenő külső és belső szögfelező merőleges egymásra), ezért $PBM\angle = PQM\angle$ és $MBQ\angle = MPQ\angle$. Tehát $PBQ\angle = ABC\angle$ a P-nél és Q-nál levő belső szögek összegének fele. Ugyanígy kapjuk, hogy $CDA\angle$ az R-nél és S-nél levő belső szögek összegének fele. Az $ABCD$ négyszög D-nél és B-nél levő szögének összege tehát egyenlő a $PQRS$ konvex négyszög belső szögeinek összegével, az egyenes szöggel. Tehát $ABCD$ valóban húrnégyszög.

17.36. Az 1. ábra jelöléseit használjuk. $PMB\angle = PQB\angle$, mert $PMQB$ húrnégyszög, és $RQC\angle = RMC\angle$, mert $CRQM$ húrnégyszög. E két szög összegét tehát ismerjük: a $PQRS$



17.33M.1. ábra.

négyszög Q-nál levő külső szögével egyenlő.



17.36M.1. ábra.

Megmutatjuk, hogy a $BMC\angle = DMA\angle$ szöget is ismerjük. Ugyanis $MCB\angle = MRQ\angle$ (mert $MRCQ$ húrnégyszög), $CBM\angle = QPM\angle$ (mert $BPMQ$ húrnégyszög), $ADM\angle = SRM\angle$ (mert $DRMS$ húrnégyszög), végül $MAD\angle = MPS\angle$. E négy szög összege egyrészt egyenlő tehát a P-nél és R-nél levő belső szögek összegével, másrészt egyenlő az MAD háromszögben A-nál és D-nél fekvő belső szögek és a BMC háromszögben a B-nél és C-nél levő belső szögek összegével. Ez utóbbi összeg viszont éppen a $BMC\angle = DMA\angle$ szögek kiegészítő szögeinek összege. Vagyis valóban ismerjük a $BMC\angle$ szöget.

Tehát ismerjük mind az $RMC\angle$ és $BMP\angle$ szög össegét, mind a $CMB\angle$ szöget. Tehát ismerjük ezek összegét, az $RMP\angle$ szöget is. Így meg tudjuk szerkeszteni azt a PR fölötti látókörívet, amelyen rajta van M. Ugyanígy megszerkeszthető az a QS fölötti látókörív, amelyen rajta van M. E két körív metszéspontja M, s M ismeretében az AB, BC, CD, DA egyenesek már szerkeszthetők, így az $ABCD$ négyszög is.

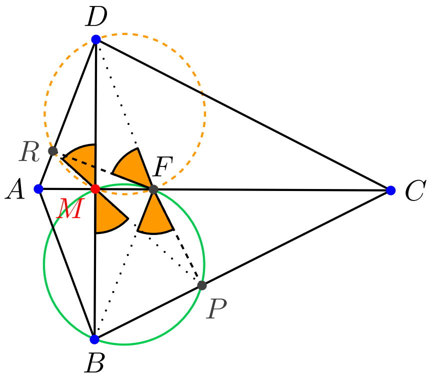
Hátra van még annak igazolása, hogy az így kapott négyszög átlóinak metszéspontja valóban M lesz. Ehhez először is érdemes kiszámolni, hogy a megszerkesztett $RMP\angle$ szög $180° - s/2 + q/2$ volt (a továbbiakban a P, Q, R, S-nél fekvő belső szögeket a megfelelő kisbetűkkel jelöljük). Mármost a szerkesztéssel kapott $AMC\angle$ (amiről be szeretnénk látni, hogy egyenesszög) éppen

$PMR\angle - PMA\angle + RMC\angle = PMR\angle - PSA\angle + RQC\angle$, és ugyanígy $BMD\angle$ szög (amiről szintén be szeretnénk látni, hogy egyenesszög) éppen $BMP\angle + PMR\angle - DMR\angle = BQP\angle +$ $+ PMR\angle - DSR\angle$. E két szög összege tehát

$2PMR\angle + RQC\angle + BQP\angle - PSA\angle - DSR\angle = 2PMR\angle + (180° - r) - (180° - s) = 360°$.

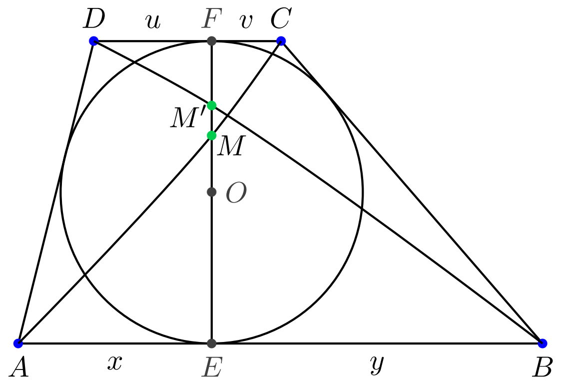
Vagyis az $AMC\angle$ és $BMD\angle$ szögek összege egy teljes szög. Ebből következik, hogy $DMC\angle =$ $= BMA\angle$. A „demokrácia szabályai” szerint kapjuk, hogy $AMD\angle = CMB\angle$. Ez utóbbi négy szög összege 360°, ezért $DMB\angle = DMC\angle + CMB\angle = 180°$, tehát M rajta van a BD átlón. Hasonlóan kapjuk, hogy az AC átlón is rajta van, tehát valóban az átlók metszéspontja, amit igazolnunk kellett.

17.37. Minden konvex deltoidra igaz. Az $MBPF$ négyszög húrnégyszög (lásd a 2. ábrát), mert P és M rajta van BF Thálész-körén. Tehát $BMP\angle = BFP\angle = 90° - CBA\angle/2$. Az $MRDF$ négyszög is húrnégyszög (M és R rajta van FD Thálész-körén), tehát $DMR\angle = DFR\angle = 90°$ $\circ - FDR\angle = 90° - ADC\angle/2 = 90° - CBA\angle$. Tehát $BMP\angle = DMR\angle$, s mivel B, M és D egy egyenesen van, így P, M, R is.



17.37M.2. ábra.

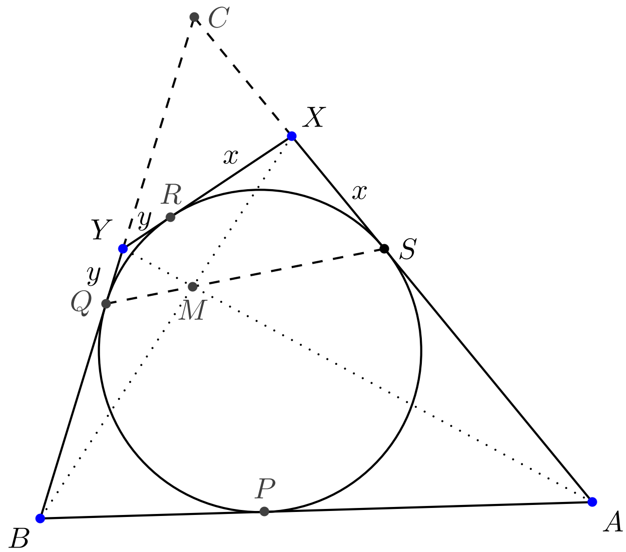
17.38. Legyen AB és CD a két párhuzamos oldal és érintse a beírt kör e két oldalt az E illetve F pontban. Jelölje AE, EB, DF és FC előjeles hosszát rendre x, y, u és v, a beírt kör sugarát r, az AC és EF metszéspontját M és EM hosszát m, DB és EF metszéspontját M' és FM' hosszát m' (lásd az 1. ábrát). A feladat állítása az, hogy $M = M'$, tehát azt kell igazolnunk, hogy $m + m' = 2r$.



17.38M.1. ábra.

Az AEM és CFE háromszögek hasonlóságából $x : m = u : (2r - m)$, amit m-re rendezve azt kapjuk, hogy $m = 2rx/(x+u)$. A DFM' és BEM' háromszögek hasonlóságából ugyanígy azt kapjuk, hogy $m' = 2rv/(v+y)$. Az $m+m' = 2r$ egyenlőség tehát ekvivalens az $x/(x+u)+v/(2+ +y) = 1$ egyenlőséggel, ami az átszorzás és rendezés után az $xv = yu$ alakra egyszerűsödik. Ez viszont igaz, hiszen az 1.10. feladat szerint mindkét szorzat a beírt kör sugarának négyzetével egyenlő.

17.39. Az 1. ábra jelöléseit használjuk. Az érintőnégyszög csúcsait sorrendben $AXYB$ jelöli, a beírt kör az AB, BY, YX, XA oldalt P-ben, Q-ban, R-ben és S-ben érinti, az AY és BX átlók metszéspontja M, az $XR = XS$ szakasz hosszát x-szel, az $YQ = YR$ szakasz hosszát y-nal jelöljük. Egyelőre feltesszük, hogy az AX és BY oldalak egyenesei metszik egymást egy C pontban és belátjuk, hogy az S, M és Q pontok egy egyenesen vannak. Ebből az állítás már minden olyan konvex érintőnégyszögre következik, amelynek nincsenek párhuzamos oldalai.



17.39M.1. ábra.

Alkalmazzuk a Meneláosz-tételt az XCB háromszögben. A, M és B egy egyenesen van, tehát Meneláosz tétele szerint $XA \cdot CY \cdot BM = AC \cdot YB \cdot MX$ (a szakaszok előjelétől eltekinthetünk), vagy az ABC háromszögben a szokásos $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$, $a+b+c = 2s$ jelöléseket és az $SA = s-a$, $CQ = s-c$, $BQ = s-b$ összefüggéseket használva:

$$\frac{(s-a+x)(s-c-y)}{b(s-b+y)} = \frac{MX}{BM}.$$

Azt akarjuk belátni, hogy S, M és Q is egy egyenesen van, tehát rájuk is teljesül Meneláosz tétele: $XS \cdot CQ \cdot BM = SC \cdot QB \cdot MX$. Itt CQ és SC hossza egyenlő, tehát azt kell belátnunk, hogy

$$\frac{x}{s-b} = \frac{MX}{BM}.$$

Elég tehát azt belátnunk, hogy a két egyenlet bal oldalán álló tört egyenlő, vagyis hogy

$$(s-a+x)(s-c-y)(s-b) = xb(s-b-y).$$

Ezt kifejtve és rendezve azt kapjuk, hogy

$$xys + (x+y)(s-a)(s-b) = (s-a)(s-b)(s-c).$$

Itt a jobb oldalon $\frac{t^2}{s}$ áll, ezzel átosztva az

$$\frac{xy}{r^2}+\frac{x+y}{s-c}=1$$

egyenlethez jutunk (r-rel a beírt kör sugarát jelöljük). Bevezetjük az $XOR\angle=\varphi$ és $ROY\angle=$ $=\psi$ jelölést, és megállapítjuk, hogy egyrészt e két szög öszege $90^\circ-\frac{\gamma}{2}$, másrészt $\frac{x}{r}=\tan\varphi$ és $\frac{y}{r}=\tan\psi$, végül $\frac{r}{s-c}=\tan\frac{\gamma}{2}$. Utolsó egyenletünk tehát így alakul:

$$\tan\varphi\tan\psi+(\tan\varphi+\tan\psi)\tan\frac{\gamma}{2}=1.$$

Ezt átalakítva a $\cot(\varphi+\psi)=\tan\frac{\gamma}{2}$ azonossághoz jutunk. Átalakításaink ekvivalensek voltak, így az állítást – legalábbis abban az esetben, amikor az érintőnégyszögnek nincsenek párhuzamos oldalai – igazoltuk.

Ha az érintőnégyszög trapéz, akkor a szárakon való érintési pontokat összekötő szakaszokra ugyanígy működik a bizonyítás. Az alapokat összekötő szakaszra pedig az 1.10. feladat igaz az állítás.

Marad a rombusz esete. A rombusznál általánosabban, deltoidokra a 17.37. feladatban bizonyítottuk az állítást.

17.40. A feladat lényegében a **??**. feladat átfogalmazása, hiszen a hozzáírt kör középpontjai által alkotott háromszögnek az ABC háromszög a talpponti háromszöge.

17.41. AT szakasz antiparalel az AC oldallal, tehát felezőpontja rajta van a B-ből induló szimediánon (l. a 16.3. feladatot). A szimedián szögfelezőre vonatkozó tükörképe a súlyvonal, tehát az e egyenes valóban felezi a szemközti AC oldalt.

17.42. Induljunk ki a kész ábrából és húzzuk meg az AC-vel párhuzamos, P-ből induló félegyenest, majd mérjük fel rá a $PP'=QC$ távolságot. A BPP' egyenlőszárú háromszögben $BP=PP'$ és ismerjük a P-nél fekvő szöget (egyenlő $BAC\angle$ szöggel), tehát ismerjük az AP' félegyenes irányát, így meghúzhatjuk magát az AP' félegyenest is. Vegyünk fel egy tetszőleges R pontot az AB oldalon, és szerkesszük meg az AP' félegyenesnek azt az R' pontját, amelyre $BR=RR'$, majd szerkesszük meg a BC oldalon (vagy: BC félegyenesen) azt a C' pontot, amelyre $R'C'=RR'$. A $BRR'C'$ törött vonalat nagyítsuk (vagy kicsinyítsük) B-ből úgy, hogy C' pont C-be menjen. Az R pont képe lesz a megfelelő P pont és R' pont képe a megfelelő P' pont. A Q pontot úgy szerkesztjük, hogy $PP'CQ$ paralelogrammát alkosson.

A kapott $BPQC$ törött vonal nyilván az egyetlen jó megoldás.

17.43. Jelölje az AB oldallal húzott párhuzamosnak az AC oldallal vett metszéspontját S, a BC oldallal vett metszéspontját S', jelölje továbbá az AC oldallal húzott párhuzamosnak az AB oldallal vett metszétpontját T, a CB oldallal vett metszéspontját T'. Jelölje végül a CB-vel húzott párhuzamos és AB metszéspontját U, AC-vel való metszéspontját U'. $SS'UT$ négyszög húrtrapéz, mert a négy csúcs egy körön van és SS' párhuzamos a TU oldallal. Tehát az $STUS'T'U'$ húrhatszögben a T-nél és az U-nál levő külső szög egyenlő. A „demokrácia szabályai" szerint az S' és T' csúcsnál levő szögek is egyenlők, végül az S-nél és U'-nél levő szögek is egyenlők. E hat szög összege 360°, tehát például az S-nél és T-nél levő külső szöget az S'-nél levő szög is, az ABC háromszög A-nál fekvő szöge is 180°-ra egészíti ki (e két külső szög az AST háromszög két belső szöge, a harmadik az A-nál fekvő szög). Tehát a T'-nél és S'-nél fekvő külső szög – a szokásos jelölésekkel – egyaránt α. Ismét a „demokrácia szabályait" alkalmazva kapjuk, hogy a T-nél és U-nál fekvő külső szög egyaránt γ, amiből következik, hogy az $S'U$ szakasz antiparalel az AC oldallal. Mivel $UPS'B$ négyszög paralelogramma, ezért a BP egyenes felezi az AC-vel antiparalel szakaszokat, hiszen ha egyet felez, akkor az összeset felezi, mert az azonos oldallal antiparalel szakaszok mind párhuzamosak. Azt kapjuk, hogy az összes megfelelő P pontnak rajta kell lennie azon az egyenesen, amely az AC oldallal antiparalelek felezőpontjaiból áll – tehát a B csúcshoz tartozó szimediánon, l. a 11.11. feladatot –, s a „demokrácia szabályai szerint” ugyanígy rajta kell lennie az AB oldallal antiparalelek felezőpontjaiból álló egyenesen, vagyis a C-hez tartozó szimediánon is, és az A-hoz tartozó szimediánon is. E három egyenesnek legfeljebb egy közös pontja lehet, és a 16.1. feladatban láttuk, hogy egy közös pontja van is, ez a háromszög Lemoine-Grebe pontja.

A 16.5. feladatban beláttuk, hogy erre a pontra valóban teljesül is a feladat állítása.

17.48.

1. megoldás. A szögfelező hosszának és $\beta-\gamma$ szögkülönbség ismeretében az A csúcsból induló magasságvonal hossza is ismert. Induljunk ki a kész ábrából és szerkesszük meg A-nak a BC oldal felezőmerőlegesére vonatkozó tükörképét, jelöljük ezt a pontot A'-vel. Az $AA'B$ háromszögben ismert az $AB : BA' = c : b$ arány és az $ABA'\angle = \beta-\gamma$ szög, tehát szerkeszthetünk egy hozzá hasonlót: felvesszük az A pontot és tetszőlegesen egy A'' pontot. Megszerkesztjük az AA'' szakasz egyik oldalán a $\beta-\gamma$-hoz tartozó látókörívet, valamint a $b : c$ arányhoz tartozó Apolloniusz-kört. E két körnek két, az AA'' oldalra tükrös metszéspontja van, tehát két egybevágó megoldást kapunk. Ezek bármelyikét a magasságvonal hosszának ismeretében A-ból felnagyítjuk a kívánt nagyságúra, majd AA' felezőmerőlegesére tükrözzük a kapott B csúcsot.

Megjegyzés. Ha $b : c = 1$ a megadott arány, akkor az oldalfelező merőleges játssza az Apolloniusz-kör szerepét. Ám ekkor nincs megoldás, ha a $\beta-\gamma$ különbség nem nulla (B és tükörképe egybe fog esni), viszont ha ez a különbség nulla akkor nincs látókörív!!, viszont végtelen sok megoldás van, hiszen az egyenlőszárú háromszögben csak a szögfelező hosszát ismerjük.

2. megoldás. Először szerkesztünk egy, a keresett háromszöghöz hasonlót. Felvesszük a B és C pontot. A $b : c$ arány ismeretében megszerkesztjük az ehhez az arányhoz tartozó Apolloniusz-kört és annak a BC oldallal való F metszéspontját. A $\beta-\gamma$ különbség ismeretében szerkeszthető az FA egyenes (ez $90° - (\beta-\gamma)/2$ szöget zár be a BC oldallal. A kapott háromszöget akkorára nagyítjuk, hogy a szögfelező hossza az adott hosszúságú legyen.

Megjegyzés. Ha $b : c = 1$ a megadott arány, akkor az oldalfelező merőleges játssza az Apolloniusz-kör szerepét. Ám ekkor nincs megoldás, ha a $\beta-\gamma$ különbség nem nulla, viszont végtelen sok megoldás van, ha ez a különbség nulla, hiszen az egyenlőszárú háromszögben csak a szögfelező hosszát ismerjük.

17.50. Három gömb nyilván nem elég, hiszen a középpontjaik alkotta síkra merőleges irányban biztosan kijut a fény.

Nyilván nem lényeges kikötés, hogy milyen messziről ne látszódjon a fényforrás, hiszen a fényforrásból tetszőlegesen kicsinyíthetjük a gömbök rendszerét. Másrészt az sem lényeges kikötés, hogy a gömbök nem nyúlhatnak egymásba, hiszen ha egymásba nyúlik két gömb, akkor az egyiket a fényforrásból úgy kicsinyítjük, hogy már ne nyúljanak egymásba.

Vegyünk egy (mondjuk: szabályos) tetraédert, amely tartalmazza a fényforrást. E tetraéder minden lapja lefedhető egy-egy gömbbel, amely magát a fényforrást nem tartalmazza. E négy gömb pedig nem engedi át a fényforrás fényét.

Négy gömbbel tehát eltakarható a pontszerű fényforrás, de kevesebbel nem.

17.51. Lehetséges, ha kertje elég nagy hozzá. Először nézzük azt a kicsit egyszerűbb esetet, ha a báró azt állítja, hogy ugyanannyi nyírfája és nyárfája van. Ha minden nyírfától pontosan 10 méterre legalább két nyárfa áll, akkor már egy 10 méter oldalú négyzet négy csúcsába ültetett nyírfa-nyárfa-nyírfa-nyárfa is megteszi. Ha most minden nyírfától 10 méterre legalább három nyárfa áll, akkor toljuk el ezt a négyzetet 10 méterrel úgy, hogy az eltolás iránya egyik oldallal se legyen párhuzamos és az új négyzetben fordítsuk meg a nyírfák és nyárfák elrendezését. Ekkor minden nyírfától három nyárfa lesz 10 méterre, és a nyír- és nyárfák aránya továbbra is 1. Innen már világos, hogy mi a teendőnk. Ha már elértük, hogy minden nyírfától 10 méterre legalább k darab nyárfa áll és minden nyárfától 10 méterre legalább k darab nyírfa, akkor most toljuk el az egész formációt 10 méterrel úgy, hogy új pont ne essen egybe régivel. Ez a feltétel csak véges sok irányt zár ki, márpedig végtelen sok irány van. Tehát eltolhatjuk úgy a formációt, hogy az összes új csúcs különbözzön minden régitől. Cseréljük ki a nyírfákat és nyárfákat az eltolással keletkezett formációban. Ekkor minden nyírfától 10 méterre legalább $k+1$ nyárfa lesz és minden nyárfától 10 méterre legalább $k+1$ nyírfa, és a nyírfák és nyárfák száma továbbra is egyenlő.

Az eljárást addig ismételjük, amíg minden nyírfától 10 méterre legalább 101 nyárfa áll, majd elhagyunk egyetlen nyárfát. Így Münchhausen báró állításának megfelelő formációt kapunk. Csak néhány kilométeres átmérőjű kert kell hozzá.

17.53. A kész ábrából indulunk ki. Az AC és BD egyenes metszéspontja P, és feltesszük, hogy ez a P pont a körön van.

Húzzunk érintőt A-ból és B-ből a K körhöz. A szelő-érintő tétel szerint $AC \cdot AP = AE^2$ és innen AP^2-tel osztva azt kapjuk, hogy $AE^2/AP^2 = AC/AP$. A párhuzamosság miatt ez utóbbi arány egyenlő BD/BP-vel, ami viszont megint a szelő-érintő tétel szerint egyenlő BF^2/BP^2. Azt nyerjük, hogy $AE/AP = BF/BP$, vagy másképp $BP/AP = BF/AE$. Az A és B ponthoz tartozó BF/AE arányú Apolloniusz-kör metszi ki a P ponto(ka)t. Ha két kör nem metszi egymást, nincs megoldás, ha érintik egymást, akkor egy, ha metszik, akkor két szimmetrikus megoldás van.

Ha P mind az AC, mind az BD szakaszon rajta van, vagy ha egyiken sincs rajta, akkor és csak akkor a kapott megoldás(ok) jó(k), mert $AP/BP = AE/BF$, ahonnan négyzetre emeléssel $AP^2/BP^2 = AE^2/BF^2 = AC \cdot AP/BD \cdot BP$, vagyis $AP/BP = AC = BD$, tehát AB és CD valóban párhuzamos.

17.54. Jelölje az oldalhosszakat a, b, c és d. A négyszög érintőnégyszög, tehát $a+c = b+d = s$ a félkerülete. Innen $a = s-c$, $b = s-d$, $c = s-a$ és $d = s-b$, tehát $abcd = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d)$. Utóbbi szorzat a húrnégyszög területének négyzete.

17.57. Tükrözzük az A csúcsot a BC oldal felezőpontjára. Az így kapott A' pont távolsága az AC egyenestől m_b, az A csúcstól $2s_a = 2m_b$, vagyis A' vetületét az AC oldalon T-vel jelölve az $AA'T$ háromszög félszabályos háromszög, $A'AT\angle = A'AC\angle = 30°$, állandó. Sajnos a három csúcs közül csak A állandó, de ha észrevesszük, hogy $ABA'C$ paralelogramma, s így $A'AC\angle =$ $= AA'B\angle$, itt már A és B is fix, tehát A' rajta van az AB fölötti 30°-os látókörívek valamelyikén, s a gondolatmenetet visszafele alkalmazva azt is láthatjuk, hogy a látókörív(ek) bármely A' pontjához olyan C pont tartozik, amelyre az ABC háromszögben $m_b = s_a$.

Ezzel megkaptuk A' mértani helyét. Ha a két látókörívet eltoljuk a $\overrightarrow{BA}$ vektorral, akkor megkapjuk C mértani helyét. Ezt legegyszerűbben úgy írhatjuk le, hogy ha B A-ra vonatkozó tükörképe B', akkor C mértani helye a $B'A$ fölötti két 30°-os látókörív.

17.58. Az $OP : PP' = OP : RP$ arány csak α-tól függ, tehát állandó. Vagyis ha ez az arány 1 (azaz $\alpha = 60°$, akkor az OR szakasz felezőmerőlegese a megoldás, minden más esetben egy Apollóniusz-kör.

17.59. Tegyük fel, hogy az ABC háromszög A-ból induló súlyvonaláról van szó. Az érintő-tétel szerint a feladat feltétele ekvivalens azzal, hogy az A pontból és a BC oldal F felezőpontjából a beírt körhöz húzott érintőszakaszok egyenlő hosszúak, vagyis a szokásos jelölésekkel $s - a = |b -$ $- c|/2$. Feltehetjük, hogy úgy betűztünk, hogy $b \geq c$ s ekkor azt kapjuk, hogy $b + c - a = b - c$, ahonnan $a = 2c$.

Az állítás megfordítása is igaz: ha a valamelyik másik oldal kétszerese, akkor az A-ból és F-ből húzott érintőszakaszok egyenlő hosszúak, tehát az A-ból induló súlyvonalra igaz a feladat feltétele.

17.60. A szokásos jelöléseket használjuk, tehát $CBR\angle = BAC\angle = PCB\angle = \alpha$ (irányított szögekkel számolunk, hogy ne kelljen diszkutálni). Azt kell belátnunk, hogy a BC szakasz felezőmerőlegesén rajta van az APR háromszög köré írt kör K középpontja. A kerületi és középponti szögek tétele szerint $PKR\angle = 2\alpha$. Másrészt világos, hogy a BR és CP szakszok X metszéspontja rajta van BC felezőmerőlegesén és $RXP\angle = BXC\angle = 180° - 2\alpha$. A húrnégyszögekről szóló tétel szerint $PKRX$ húrnégyszög.

Tekintsük a PXR háromszög köré írt kör és BC felezőmerőlegesének (X-től különböző) M metszéspontját. Ha belátjuk, hogy $M = K$, akkor kész vagyunk.

Jelölje F a BC oldal felezőpontját. M, X, F a BC oldalfelező merőlegesén vannak. Ezért $PXM\angle = CXF\angle = 90° - \alpha$ és $MXR\angle = FXB\angle = 90° - \alpha$, tehát a kerületi szögek tétele szerint $PM = PR$. Másrészt $PXRM$ húrnégyszög és $RXP\angle = 180° - 2\alpha$, így $PMR\angle = 2\alpha$. Tehát M valóban az APR háromszög köré írt körének középpontja.

17.63. Legyen T az a pont a CD egyenes C-n túli meghosszabbításán, amelyre $CTD\angle = CPD\angle$, és ugyanígy legyen U az a pont a D-n túli meghosszabításán, amelyre $DTC\angle = DPC\angle$. A kerületi szögek tétele szerint e két pont helyzete független P helyzetétől. Másrészt a TCX, PYX és UYD háromszögek hasonlók. Ebből következik, hogy $TC : TX (= PY : YX) = UY : UD$, azaz $TX \cdot UY = TC \cdot UD$. Utóbbi állandó. A feladat azt kérdezi, mikor lesz XY maximális, ami ekvivalens azzal a kérdéssel, hogy a $TX + YU$ összeg mikor minimális. Mivel a szorzatuk állandó, az összegük akkor minimális, amikor mindkettő egyenlő a szorzat négyzetgyökével. Ez pedig könnyen szerkeszthető, így T és U is szerkeszthető. A gondolatmenet visszafordításából következik, hogy CX és DY egyenes a körön fog találkozni és ez lesz a maximális helyzet.

Alkalmazott rövidítések

Könyvek neveinek rövidítései

A.I	Algebra, 7–8. évfolyam
A.II	Algebra, 9–10. évfolyam
A.III	Algebra, 11–12. évfolyam
ALG.II	Algoritmusok, 9–10. évfolyam
ANAL.III	Analízis, 11–12. évfolyam
F.I	Függvények, 7–8. évfolyam
F.III	Függvények, 11–12. évfolyam
G.I	Geometria, 7–8. évfolyam
G.II	Geometria, 9–10. évfolyam
G.III	Geometria, 11–12. évfolyam
GR.II	Speciális gráfelméleti példák, 9–10. évfolyam
K.I	Kombinatorika, 7–8. évfolyam
K.II	Kombinatorika, 9–10. évfolyam
K.III	Kombinatorika, 11–12. évfolyam
SZ.I	Számelmélet, 7–8. évfolyam
SZ.II	Számelmélet, 9–10. évfolyam
V.II	Valószínűségszmítás és statisztika, 9–10. évfolyam
VV.III	Városok viadala, 11–12. évfolyam
ZARUB	Nemzeti versenyek, 11–12. évfolyam

Segítség és megoldás jelzése

A feladatok sorszámánál kerek zárójelben „M” és „S” jelzi, ha a feladathoz (M)egoldás vagy (S)egítség található.
Például 5. (M) Oldjuk meg a ... vagy 5. (MS) Oldjuk meg a ...

Hivatkozás jelzése

A feladatok sorszámánál szögletes zárójelben zárójelben szám jelzi a feladat származását vagy kapcsolatát mutató hivatkozást az „Ajánlott irodalom” részben.
Például: 4. [20.] Oldjuk meg a ...

Irodalomjegyzék

[1] Hraskó András: Poncelet-type problems, an elementary approach. 55. évf. (2000) 2. sz., *Elemente der Mathematik*, 45–62. p.

[2] Kubatov Antal: Ptolemaios-tétel, casey-tétel, feladatok. 2004., *Fazekas matematika portál.* Olvasható a http://matek.fazekas.hu/portal/tanitasianyagok/Kubatov_Antal/PtolemaiosCasey/ weboldalon.

[3] Bartha Zsolt diák, 2009c. Fővárosi Fazekas Mihály Gimnázium.

[4] Danka Miklós diák, 2009c. Fővárosi Fazekas Mihály Gimnázium.

[5] Gáspár Merse Előd: Az origami matemetikája. Előadás a Főv. Fazekas Gimnáziumban, 2006. 05. 29-én.

[6] Molnár Emil (szerk.): *Elemi matematika (Geometriai transzformációk).* ELTE egyetemi jegyzet sorozat, II. köt. 17. kiad. Budapest, 1992, Tankönyvkiadó.

[7] E. G. Gotman: Geometriai transzformációk ii.: hasonlóságok. 1989. 3. sz., *Kvant*, 52–55. p. URL `http://kvant.mirror1.mccme.ru/1989/03/geometricheskie_preobrazovaniy.htm`.

[8] H. S. M. Coxeter S. L. Greitzer: *Az újra felfedezett geometria.* 1977, Gondolat könyvkiadó. angolul: Geometry Revisited.

[9] Grósz Dániel diák, 2009c. Fővárosi Fazekas Mihály Gimnázium.

[10] Reiman István: *Fejezetek az elemi geometriából.* Budapest, 1987, Tankönyvkiadó. ISBN 963 18 0257 4. Újabb kiadás: Typotex.

[11] Kalló Bernát diák, 2009c. Fővárosi Fazekas Mihály Gimnázium.

[12] Középiskolai matematikai és fizikai lapok. A Bolyai János Matematikai Társulat és az Eötvös Loránd Fizikai Társulat folyóirata. URL `http://www.komal.hu`.

[13] Vigassy Lajos: *Geometriai transzformációk.* Budapest, 1963, Tankönyvkiadó.

[14] Surányi László: A háromszög kevésbé ismert nevezetes pontjairól I. és II. 1984. 7. és 8/9. sz., *Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok.* A http://db.komal.hu/scan/1984/10/, http://db.komal.hu/scan/1984/11/ könyvtárakból letölthető a két cikk, idővel elérhető lesz a Kömal elektronikus archívumában.

[15] P. A. Kozsevnyikov O. K. Podlipszkij D. A. Teresin N. H. Agahanov, I. I. Bogdanov: *Összoroszországi matematikai diákolimpiák 1993-2006, feladatok és megoldások.* Moszkva, 2007, Izdatyelsztvo MCNMO. ISBN 978 5 94057 262 6. (Vszerosszijszkie olimpiadü skolnyikov po matematike).

[16] Nagy János diák, 2011d. Fővárosi Fazekas Mihály Gimnázium.

[17] V. V. Prasolov: *Síkgeometriai feladatok.* A matematika szakkörök könyvtára, 15. kötet sorozat, I. köt. Moszkva, 1986, Nauka. orosz: zadacsi po planimetrii.

[18] Sarigin: A szögfelező körül. In *Matematika szakkörök - Geometria I.* (konferenciaanyag). 1998, 53–60. p.

[19] Dobos Sándor: *Olimpiai válogatóversenyek 2001-2005.* Budapest, 2005, nincs feltüntetve – Bolyai János Matematikai Társulat.

[20] Tomon István diák, 2009c. Fővárosi Fazekas Mihály Gimnázium.

[21] N. B. Vasziljeva (szerk.): *Kvant feladatgyűjtemény.* II. köt. 1997, Bjuro Kvantum. ISBN 5 85843 004 X. A Kvant feladatai 1981-től 1994-ig.

[22] Gombos Éva és Somogyi László: *Matematika határok nélkül.* Budapest, 1997, Scolar Kiadó. ISBN 963 85341 7 6.

[23] Horvay Katalin és Reiman István: *Geometriai feladatok gyűjteménye I.* 33. kiad. Budapest, 2004, Nemzeti Tankönyvkiadó Rt. ISBN 963 19 4795 5.